

Calculatrice autorisée

## Exercice 1

4 points

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

Un code PIN de smartphone est composé de quatre chiffres.

- **Affirmation 1** : le nombre de codes PIN différents est  $10^4$ .
- **Affirmation 2** : le nombre de codes PIN composés de chiffres tous différents et ayant un « 1 » en 3<sup>e</sup> position est 720.
- **Affirmation 3** : on souhaite colorier les quatre cases de la bande ci-contre 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

 et on dispose de cinq couleurs différentes. Le nombre de coloriages possibles est  $4^5$ .
- **Affirmation 4** : pour tout réel  $x$ , on a  $e^{2x+1} \geq 1$ .

## Exercice 2

3 points

### Partie A

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^{x^2+1} = e^{2x+5}$ .

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,75 u_n + 2$ .

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 8$ .
- 2) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice 3

5 points

Liam a étudié la croissance d'un arbuste depuis qu'il l'a planté dans son jardin. La hauteur de cet arbuste, en centimètres,  $t$  mois après sa plantation, est modélisée par la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 12]$  par

$$f(t) = \frac{120 e^t}{e^t + 3}.$$

- 1) Calculer la hauteur de l'arbuste le jour de sa plantation.
- 2) Démontrer que, pour tout réel  $t$  de  $[0 ; 12]$ ,  $f'(t) = \frac{360 e^t}{(e^t + 3)^2}$ .
- 3) Étudier le signe de  $f'(t)$  sur  $[0 ; 12]$ .
- 4) En déduire le tableau de variations de  $f$ .
- 5) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0.
- 6) Pour des raisons esthétiques, Liam décide qu'il taillera l'arbuste dès qu'il dépassera 1 m de haut. Déterminer, à la calculatrice, au bout de combien de mois Liam devra tailler l'arbuste. Expliquer la démarche suivie.

### Exercice 4

3 points

Une maison de quartier propose des séjours « multisports » à destination des adolescents et des journées « jeux de société » à destination des seniors.

- 1) Lors d'une journée « jeux de société », le centre accueille 100 seniors.

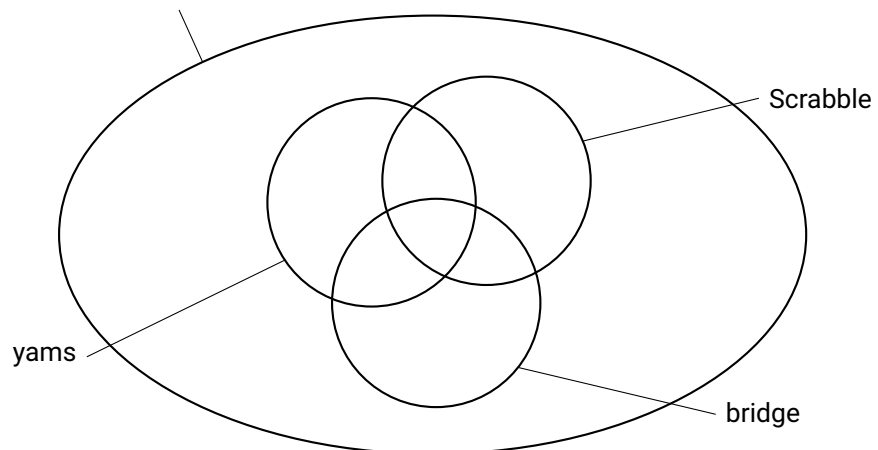
34 jouent au Scrabble, 21 au bridge et 26 au yams.

Par ailleurs, 10 jouent au bridge et au yams, 9 jouent au yams et au Scrabble et 12 jouent au bridge et au Scrabble, sans oublier les 4 seniors qui jouent aux trois jeux.

- a. Compléter directement sur le sujet le diagramme ci-dessous, en indiquant dans chaque zone le nombre de seniors correspondant.

Aide : commencer par la zone centrale (les trois jeux), puis les zones « exactement deux jeux », puis les zones « un seul jeu », et terminer par la zone extérieure aux trois disques.

seniors participant à la journée



- b. Déterminer le nombre de seniors qui ne jouent qu'à un seul jeu.

- c. Déterminer le nombre de seniors qui jouent à exactement deux jeux.

- 2) À l'occasion du stage « multisports », le centre accueille 100 adolescents. Parmi eux, 60 sont venus pour un stage d'escalade, 45 pour un stage d'équitation, et 13 pour aucun de ces deux sports.

Combien d'adolescents vont pratiquer l'escalade et l'équitation ?

### Exercice 5

5 points

Une plateforme propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B. On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $A_n$  et  $B_n$  les événements :

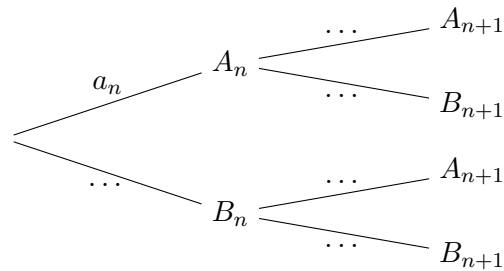
- $A_n$  : « la  $n$ -ième partie est une partie de type A »;

- $B_n$  : « la  $n$ -ième partie est une partie de type B ».

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $a_n$  la probabilité de l'événement  $A_n$ .

On suppose que la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie est égale à 0,4.

- 1) Démontrer que  $a_2 = 0,5$ .
- 2) Compléter l'arbre pondéré ci-contre.



- 3) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,3$ .
- 4) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $a_n = -0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,6$ .

- 5) On considère la fonction ci-contre, écrite en Python.  
Que renvoie l'appel `seuil(0.59)` ?  
Interpréter ce résultat.

```

1 def seuil(k):
2     n = 1
3     while -0.2*0.5**(n-1) + 0.6 < k:
4         n = n + 1
5     return n

```

- 6) La plateforme diffuse une publicité insérée au début des parties de type A et une autre insérée au début des parties de type B. Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?