

Exercice 1

7 points

- 1) Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc on peut multiplier par $x^2 + 1$:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\iff 2x^2 - 4x + 5 = x^2 + 1 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 = 0 \\ &\iff (x - 2)^2 = 0 \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

Le réel 1 a un unique antécédent par f : $x = 2$.

Vérification : $f(2) = \frac{8 - 8 + 5}{4 + 1} = \frac{5}{5} = 1$.

- 2) a. f est le quotient de deux fonctions polynômes, dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur $x^2 + 1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ (car $x^2 + 1 \geq 1$). Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- b. On pose $u(x) = 2x^2 - 4x + 5$, $u'(x) = 4x - 4$, $v(x) = x^2 + 1$, $v'(x) = 2x$.

Comme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x - 4)(x^2 + 1) - (2x^2 - 4x + 5) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 4x - 4x^2 - 4 - 4x^3 + 8x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

On a bien, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2 + 1)^2}$.

- c. $f'(0) = \frac{-4}{1^2}$, soit $f'(0) = -4$.

Interprétation graphique : $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0. La tangente T_0 a donc pour coefficient directeur -4 (elle « descend » de 4 unités quand on avance de 1), ce qui est cohérent avec la figure.

- 3) a. f est définie sur $\mathbb{R}$: on cherche les limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Pour $x \neq 0$, on factorise par x^2 au numérateur et au dénominateur :

$$f(x) = \frac{x^2 \left(2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Or $\frac{4}{x}$, $\frac{5}{x^2}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$. Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

- b. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

4) Pour tout réel x , $(x^2 + 1)^2 > 0$: $f'(x)$ est du signe du trinôme $4x^2 - 6x - 4$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 36 + 64 = 100 > 0, \text{ d'où deux racines :}$$

$$x_1 = \frac{6 - 10}{8} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + 10}{8} = 2.$$

Le coefficient de x^2 est $4 > 0$: le trinôme est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

$$\text{Valeurs : } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + 2 + 5}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{15}{2} \times \frac{4}{5} = 6 \quad \text{et} \quad f(2) = 1 \text{ (question 1).}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		6		1		2

f est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$, décroissante sur $[-\frac{1}{2}; 2]$, croissante sur $[2; +\infty[$.

Le maximum 6 (atteint en $-\frac{1}{2}$) et le minimum 1 (atteint en 2) se lisent bien sur la courbe.

5) a. T_0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, avec $f(0) = \frac{5}{1} = 5$ et $f'(0) = -4$:

$$T_0 : y = -4x + 5.$$

b. Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de $f(x) = -4x + 5$. Comme $x^2 + 1 > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = -4x + 5 &\iff 2x^2 - 4x + 5 = (-4x + 5)(x^2 + 1) \\ &\iff 2x^2 - 4x + 5 = -4x^3 + 5x^2 - 4x + 5 \\ &\iff 4x^3 - 3x^2 = 0 \\ &\iff x^2(4x - 3) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ordonnées (sur T_0 , plus simple) : $-4 \times 0 + 5 = 5$ et $-4 \times \frac{3}{4} + 5 = 2$.

Les points d'intersection sont $A(0; 5)$ et $B(\frac{3}{4}; 2)$.

Vérification : $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{9}{16} - 3 + 5}{\frac{9}{16} + 1} = \frac{\frac{25}{16}}{\frac{25}{16}} = 2$. La racine double $x = 0$ traduit le contact de la tangente avec la courbe en A .

Exercice 2

3 points

- 1) Un tirage est une partie à 8 éléments de l'ensemble des 32 cartes (l'ordre ne compte pas, pas de répétition) : c'est une combinaison de 8 cartes parmi 32.

$$\binom{32}{8} = \frac{32!}{8!24!} = 10\,518\,300 \text{ tirages.}$$

Sans calculatrice, l'écriture $\binom{32}{8}$ suffit.

- 2) Maya choisit d'abord 8 cartes parmi 32 : $\binom{32}{8}$ possibilités. Il reste alors $32 - 8 = 24$ cartes, parmi lesquelles Valentine en choisit 8 : $\binom{24}{8}$ possibilités pour chaque main de Maya. Par le principe multiplicatif :

$$\binom{32}{8} \times \binom{24}{8} = 10\,518\,300 \times 735\,471 = 7\,735\,904\,619\,300 \text{ tirages.}$$

(On distingue la main de Maya de celle de Valentine : c'est le sens de « Maya pioche en premier, puis Valentine ».)

- 3) Les 8 cartes de la main sont toutes différentes ; un rangement est une façon de les ordonner de gauche à droite, c'est-à-dire une permutation de 8 éléments :

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1, \text{ soit } 40\,320 \text{ rangements.}$$

Exercice 3

7 points

$$1) u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{3 \times \frac{1}{2}}{1+2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}, \text{ soit } u_1 = \frac{3}{4}.$$

- 2) a. Pour que l'information (*) s'applique, les termes doivent être dans $[0; +\infty[$: on démontre donc la propriété un peu plus forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n) : 0 < u_n < u_{n+1} < 1,$$

qui contient l'inégalité demandée.

Initialisation. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{3}{4}$, donc $0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Les réels $0, u_n, u_{n+1}$ et 1 sont dans $[0; +\infty[$, où f est strictement croissante, donc l'ordre est conservé :

$$\begin{aligned} 0 < u_n < u_{n+1} < 1 \\ \iff f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1) & (f \text{ strictement croissante sur } [0; +\infty[) \\ \iff 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1 & (f(0) = 0, f(1) = \frac{3}{3} = 1, f(u_k) = u_{k+1}) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$u_n < u_{n+1} < 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$: la suite (u_n) est **strictement croissante**.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 (car $u_{n+1} < 1$ pour tout n , et $u_0 < 1$). D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite ℓ , avec $u_0 \leq \ell \leq 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

3) a. Comme $u_n < 1$ pour tout n , $1 - u_n \neq 0$ et v_n est bien défini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{3u_n}{1 + 2u_n} = \frac{1 + 2u_n - 3u_n}{1 + 2u_n} = \frac{1 - u_n}{1 + 2u_n},$$

donc

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} \times \frac{1 + 2u_n}{1 - u_n} = 3 \times \frac{u_n}{1 - u_n} = 3v_n.$$

La suite (v_n) est **géométrique de raison 3**, de premier terme $v_0 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 3^n$, soit **$v_n = 3^n$** .

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec $1 - u_n \neq 0$ et $1 + v_n > 0$) :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n}{1 - u_n} \iff v_n(1 - u_n) = u_n \\ &\iff v_n = u_n + v_n u_n = u_n(1 + v_n) \\ &\iff u_n = \frac{v_n}{1 + v_n}. \end{aligned}$$

Avec $v_n = 3^n$: $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.

Vérification : $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{3}{4}$, $u_2 = \frac{9}{10}$, et par la relation de récurrence $u_2 = \frac{3 \times \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{10}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en divisant par $3^n \neq 0$:

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^n}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}.$$

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. Ainsi $\ell = 1$.

4) **Bonus.** La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ (quotient de fonctions polynômes, le dénominateur $1 + 2x$ ne s'annule pas sur cet intervalle).

• D'une part, $u_{n+1} \rightarrow \ell$ quand $n \rightarrow +\infty$ (c'est la même suite, décalée d'un rang).

- D'autre part, $u_n \rightarrow \ell$ avec $\ell \in [0; +\infty[$ et f continue en ℓ , donc $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, l'unicité de la limite donne $f(\ell) = \ell$: ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Résolution sur $[0; +\infty[$ (où $1 + 2x > 0$) :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 3x = x(1 + 2x) \\ &\iff 2x^2 - 2x = 0 \\ &\iff 2x(x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1. \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions; or $\ell \geq \frac{1}{2}$ (question 2.c), donc $\ell \neq 0$ et $\ell = 1$, ce qui confirme la question 3.d.

Exercice 4

3 points

Le sac contient $5 + 3 + 2 = 10$ boules. Un tirage simultané de trois boules est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 10 boules (on considère les boules comme distinctes).

1) $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6}$, soit $\boxed{120}$ tirages possibles.

2) On choisit 3 boules parmi les 5 noires : $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$, soit $\boxed{10}$ tirages.

3) Trois boules de couleurs différentes : une noire, une blanche et une rouge. Par le principe multiplicatif :

$$\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 5 \times 3 \times 2, \quad \text{soit} \quad \boxed{30} \text{ tirages.}$$

4) Les tirages sont équiprobables (tirage au hasard). Trois boules de la même couleur :

- trois noires : $\binom{5}{3} = 10$ tirages;

- trois blanches : $\binom{3}{3} = 1$ tirage;

- trois rouges : impossible, il n'y a que deux boules rouges (0 tirage).

Soit $10 + 1 + 0 = 11$ tirages favorables sur 120 :

$$P(\text{« trois boules de la même couleur »}) = \frac{11}{120} \approx 0,092.$$