

Calculatrice interdite

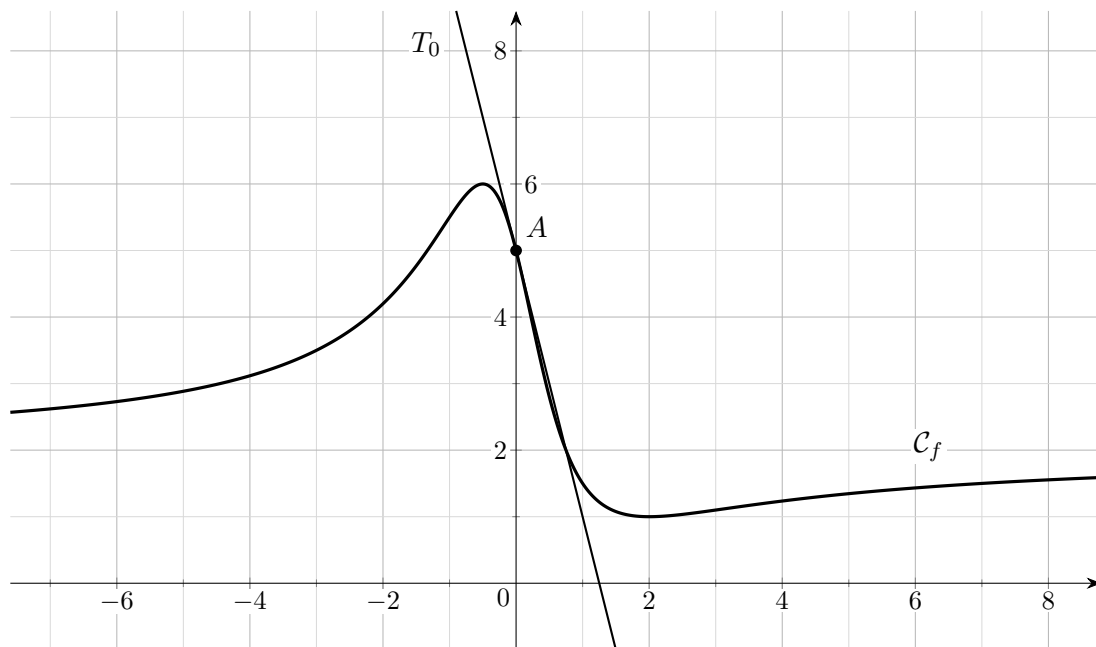
Exercice 1

7 points

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1}.$$

On a représenté également la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0, notée T_0 .



1) Déterminer **par le calcul** les antécédents éventuels de 1 par f .

2) a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2 + 1)^2}.$$

c. Calculer $f'(0)$, puis donner l'interprétation graphique du résultat trouvé.

3) a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Interpréter graphiquement les résultats de la question précédente.

4) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

5) a. Déterminer une équation de T_0 .

b. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de T_0 avec $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2

3 points

Un jeu de cartes classique comprend 32 cartes différentes. Un joueur pioche une poignée de huit cartes au début de la partie.

- 1) Combien y a-t-il de tirages de huit cartes possibles ?
- 2) Maya et Valentine disputent une partie : Maya pioche ses huit cartes en premier, puis Valentine les siennes ensuite. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
Un tirage est l'ensemble de toutes les cartes tirées par les deux joueuses.
- 3) Maya range ses huit cartes dans sa main comme sur la photo ci-dessous.
Combien y a-t-il de rangements possibles ?



Exercice 3

7 points

On considère dans cet exercice la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}.$$

- 1) Calculer la valeur exacte de u_1 (on détaillera le calcul).

On considère également la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x}{1 + 2x}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

(*) On **admettra** que f est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.

- 2)
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n < u_{n+1} < 1$.
(On pourra utiliser l'information (*).)
 - b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}.$$

- 3) a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3.
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
c. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}.$$

- d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4) **Bonus.** Démontrer que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$, puis retrouver la valeur de ℓ .

Exercice 4

3 points

Un sac contient cinq boules noires, trois boules blanches et deux boules rouges. On tire au hasard et simultanément trois boules du sac.

- 1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- 2) Combien de tirages sont composés de trois boules noires ?
- 3) Combien de tirages sont constitués de trois boules de couleurs différentes ?
- 4) Calculer la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur.