

Exercice 1

10 points

- 1) Entre le 1^{er} juin et le 31 octobre 2019, 75 baleines arrivent : il y en a $3\,000 + 75 = 3\,075$ au 31 octobre.

Une baisse de 8 % revient à multiplier par $1 - \frac{8}{100} = 0,92$:

$$u_1 = 0,92 \times 3\,075 = 2\,829.$$

Au 1^{er} juin 2020, il y a bien 2 829 baleines.

- 2) Au 1^{er} juin de l'année $2019 + n$, il y a u_n baleines. Au 31 octobre suivant, il y en a $u_n + 75$, puis l'effectif baisse de 8 % jusqu'au 31 mai :

$$u_{n+1} = 0,92(u_n + 75) = 0,92u_n + 0,92 \times 75, \quad \text{soit} \quad \boxed{u_{n+1} = 0,92u_n + 69.}$$

- 3) À la calculatrice (valeurs arrondies à l'unité) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3 000	2 829	2 672	2 527	2 394	2 271

- 4) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n \geq 862,5$ ».

Initialisation. $u_0 = 3\,000 \geq 862,5$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &\geq 862,5 \\ \iff 0,92u_n &\geq 793,5 && \text{(on multiplie par } 0,92 > 0 \text{)} \\ \iff 0,92u_n + 69 &\geq 862,5 && \text{(on ajoute 69)} \\ \iff u_{n+1} &\geq 862,5 && \text{(car } u_{n+1} = 0,92u_n + 69 \text{)} \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{u_n \geq 862,5 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} : (u_n) \text{ est minorée par } 862,5.}$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 0,92u_n + 69 - u_n = -0,08u_n + 69 = -0,08(u_n - 862,5)$$

car $0,08 \times 862,5 = 69$. D'après la question précédente, $u_n - 862,5 \geq 0$, et $-0,08 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite (u_n) est décroissante. (Vérification : $u_1 - u_0 = 2\,829 - 3\,000 = -171 = -0,08 \times 2\,137,5$.)

- c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 862,5. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente (sa limite est supérieure ou égale à 862,5).

- 5) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 862,5 = 0,92u_n + 69 - 862,5 = 0,92u_n - 793,5 = 0,92(u_n - 862,5) = 0,92v_n,$$

car $0,92 \times 862,5 = 793,5$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $v_0 = 3\,000 - 862,5$, soit $v_0 = 2\,137,5$.

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$, soit $v_n = 2\,137,5 \times 0,92^n$.
Comme $u_n = v_n + 862,5$:

$$u_n = 2\,137,5 \times 0,92^n + 862,5.$$

Vérification : $u_1 = 2\,137,5 \times 0,92 + 862,5 = 1\,966,5 + 862,5 = 2\,829$.

- c. Comme $-1 < 0,92 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,92^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\,137,5 \times 0,92^n = 0$ et, par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 862,5.$$

Interprétation : selon ce modèle, à long terme, le nombre de baleines présentes au 1^{er} juin dans la zone se stabilise autour de 862 ou 863 individus.

- 6) On part de $u_0 = 3\,000$ et $n = 0$; tant que le nombre de baleines est *supérieur ou égal* à 1 000, on calcule le terme suivant et on augmente n de 1. On renvoie l'année $2019 + n$.

```
1 def baleines():
2     u = 3000
3     n = 0
4     while u >= 1000 :
5         u = 0.92*u + 69
6         n = n + 1
7     return (2019 + n)
```

(Si l'on préfère renvoyer le rang, on écrit `return (n)` : la fonction renvoie alors 33.)

- 7) La suite (u_n) tend vers $862,5 < 1\,000$: ses termes finissent donc par passer sous 1 000, et **l'espèce sera déclarée en danger**.

À la calculatrice (ou en exécutant la fonction précédente) :

$$u_{32} \approx 1\,010,8 \geq 1\,000 \quad \text{et} \quad u_{33} \approx 998,9 < 1\,000.$$

Comme (u_n) est décroissante, $u_n < 1\,000$ pour tout $n \geq 33$. Or $2019 + 33 = 2052$: l'espèce sera déclarée en danger en **2052** (effectif relevé au 1^{er} juin). La fonction `baleines()` renvoie bien 2052.

Exercice 2

10 points

- 1) Lectures graphiques (conjectures) :

- a. Le sommet de la courbe est atteint vers $x = 20$, pour une ordonnée d'environ 54 : le nombre de malades semble maximal au bout de **20 jours**, avec environ **54 000 malades**.
- b. La tangente T passe par B , d'ordonnée environ 51, et par le point d'abscisse 55 et d'ordon-

née environ 21 :

$$\text{coefficient directeur} \approx \frac{21 - 51}{55 - 25} = \frac{-30}{30} = -1.$$

Le coefficient directeur de T semble valoir environ $\boxed{-1}$.

c. La courbe semble d'abord « tournée vers le haut » (convexe), puis « tournée vers le bas » (concave) autour du maximum, puis de nouveau convexe. Elle semble avoir $\boxed{2 \text{ points d'inflexion}}$, d'abscisses environ 6 et 34.

2) $f = u \times w$ avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, et $w(x) = e^{-0,1x}$, $w'(x) = -0,1 e^{-0,1x}$ (car $(e^{ax})' = a e^{ax}$).
Pour tout $x \in [0 ; 60]$:

$$f'(x) = u'(x)w(x) + u(x)w'(x) = 2x e^{-0,1x} - 0,1 x^2 e^{-0,1x} = x(2 - 0,1x) e^{-0,1x},$$

$$\text{soit } \boxed{f'(x) = x \left(2 - \frac{1}{10}x \right) e^{-0,1x}}.$$

3) Une équation de la tangente au point d'abscisse 10 est $y = f'(10)(x - 10) + f(10)$, avec

$$f(10) = 10^2 e^{-1} = \frac{100}{e} \quad \text{et} \quad f'(10) = 10 \times (2 - 1) \times e^{-1} = \frac{10}{e}.$$

$$\text{Donc } y = \frac{10}{e}(x - 10) + \frac{100}{e} = \frac{10}{e}x - \frac{100}{e} + \frac{100}{e}, \text{ soit}$$

$$\boxed{y = \frac{10}{e}x} \quad (\text{avec } \frac{10}{e} \approx 3,68).$$

Cette tangente passe par l'origine du repère.

4) Pour tout $x \in [0 ; 60]$, $e^{-0,1x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x \left(2 - \frac{x}{10} \right)$.

$$x \geq 0 \text{ sur } [0 ; 60] \text{ (nul en 0), et } 2 - \frac{x}{10} > 0 \iff x < 20.$$

x	0	20	60
x	0	+	+
$2 - \frac{x}{10}$	+	0	-
$e^{-0,1x}$	+	+	+
$f'(x)$	0	+	-
f	0	$400 e^{-2}$	$3600 e^{-6}$

$$f(0) = 0, f(20) = 400 e^{-2} \approx 54,13 \text{ et } f(60) = 3600 e^{-6} \approx 8,92.$$

f est croissante sur $[0 ; 20]$ et décroissante sur $[20 ; 60]$.

- 5) a. Le logiciel dérive deux fois $x \mapsto x^2 e^{-x/10}$, c'est-à-dire f (car $e^{-x/10} = e^{-0,1x}$) :

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 40x + 200) e^{-x/10}}{100}.$$

Comme $e^{-x/10} > 0$ et $100 > 0$, $f''(x)$ a le signe du trinôme $x^2 - 40x + 200$.

$\Delta = (-40)^2 - 4 \times 1 \times 200 = 1\,600 - 800 = 800 > 0$ et $\sqrt{800} = 20\sqrt{2}$; les racines sont

$$x_1 = \frac{40 - 20\sqrt{2}}{2} = 20 - 10\sqrt{2} \approx 5,86 \quad \text{et} \quad x_2 = 20 + 10\sqrt{2} \approx 34,14,$$

toutes deux dans $[0; 60]$. Le trinôme ($a = 1 > 0$) est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles :

x	0	$20 - 10\sqrt{2}$	$20 + 10\sqrt{2}$	60	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
convexité	convexe		concave		convexe

f est convexe sur $[0; 20 - 10\sqrt{2}]$ et sur $[20 + 10\sqrt{2}; 60]$,
 f est concave sur $[20 - 10\sqrt{2}; 20 + 10\sqrt{2}]$.

- b. Sur $[0; 15]$, f'' ne s'annule et ne change de signe qu'en $x_1 = 20 - 10\sqrt{2} \approx 5,86$ (car $x_2 \approx 34,14 > 15$) : elle passe de positive à négative. La courbe $\mathcal{C}$ admet donc sur $[0; 15]$ un **unique point d'inflexion**, d'abscisse $20 - 10\sqrt{2} \approx 5,86$.

Interprétation : f' est croissante sur $[0; x_1]$ (car $f'' \geq 0$) puis décroissante sur $[x_1; 20]$: la vitesse de propagation de l'épidémie (augmentation du nombre de malades par jour) est **maximale** au bout d'environ 6 jours; ensuite, le nombre de malades augmente encore, mais de moins en moins vite.

(À cet instant, $f'(x_1) \approx 4,6$: environ 4 600 nouveaux malades par jour.)

- 6) a. D'après le tableau de variations, f atteint son maximum en $x = 20$ et $f(20) = 400 e^{-2} \approx 54,13$: le maximum est atteint au bout de 20 jours avec environ 54 134 malades. La conjecture est **confirmée**.
- b. Le coefficient directeur de T est $f'(25) = 25 \times (2 - 2,5) \times e^{-2,5} = -12,5 e^{-2,5} \approx -1,03$. La conjecture (≈ -1) est **confirmée**.
- c. f'' s'annule en changeant de signe en $20 - 10\sqrt{2} \approx 5,86$ et en $20 + 10\sqrt{2} \approx 34,14$: la courbe $\mathcal{C}$ admet exactement deux points d'inflexion sur $[0; 60]$, d'abscisses environ 5,86 et 34,14. La conjecture est **confirmée**.