

Calculatrice autorisée

Exercice 1

10 points

Au large de Cape Town, en Afrique du Sud, l'organisme de protection de la vie marine a recensé 3 000 baleines au 1^{er} juin 2019.

L'espèce sera déclarée en danger dans la zone si le nombre d'individus devient inférieur à 1 000.

Les observations permettent d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 75 baleines arrivent dans la zone ;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la zone subit une baisse de 8 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre.

On modélise l'évolution du nombre de baleines par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de baleines au 1^{er} juin de l'année 2019 + n . On a donc $u_0 = 3 000$.

- Vérifier qu'au 1^{er} juin 2020, le nombre de baleines est égal à 2 829.
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,92 u_n + 69$.
- À l'aide de la table de la calculatrice, compléter directement le tableau suivant (*arrondir les valeurs lues à l'unité*) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

- Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 862,5.
 - En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
 - La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
- On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 862,5$.
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0 .
 - Exprimer alors v_n , puis u_n , en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat.

- Compléter la fonction Python ci-contre pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de baleines dans la zone de Cape Town sera strictement inférieur à 1 000.

```

1 def baleines():
2     u = ...
3     n = ...
4     while ... :
5         u = ...
6         n = ...
7     return (...)
```

- L'espèce sera-t-elle déclarée en danger un jour ? Si oui, déterminer en quelle année.

Exercice 2

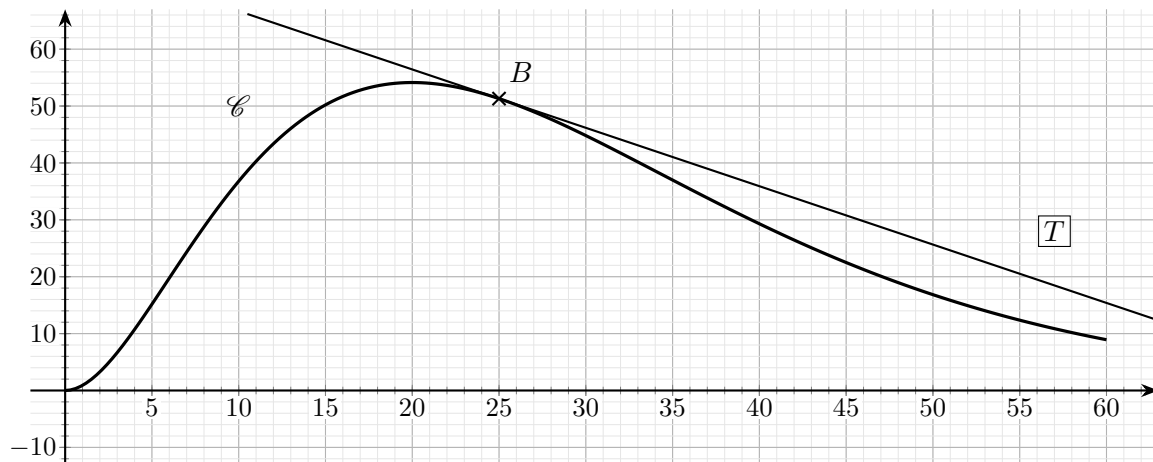
10 points

On modélise le nombre de malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie, en fonction du nombre x de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Cette modélisation est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 60]$ par $f(x) = x^2 e^{-0,1x}$.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0 ; 60]$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

La courbe représentative de la fonction f , notée $\mathcal{C}$, est donnée ci-dessous. On a tracé T , la tangente à $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse 25.



1) Conjecturer, à l'aide du graphique :

- au bout de combien de jours le nombre de malades est maximal, et préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là;
- une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T ;
- le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0 ; 60]$ et préciser, pour chaque point d'inflexion trouvé, son abscisse.

2) Montrer que, pour tout réel x de $[0 ; 60]$, on a $f'(x) = x \left(2 - \frac{1}{10}x \right) e^{-0,1x}$.

3) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 10.

4) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $[0 ; 60]$.

5) Un logiciel de calcul formel donne l'affichage suivant :

$$\frac{\text{factoriser}(\text{deriver}(\text{deriver}(x^2 \cdot \exp(-x/10))))}{(x^2 - 40x + 200) * \exp\left(\frac{-x}{10}\right)} \\ 100$$

- À l'aide des informations obtenues, étudier la convexité de la fonction f .
- Justifier que, sur l'intervalle $[0 ; 15]$, la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion. Donner une interprétation, dans le contexte de l'exercice, de l'abscisse de ce point d'inflexion.

6) Confirmer ou infirmer les conjectures faites à la question 1).