

Exercice 1

7 points

1) On applique la relation $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3} \times 1 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2, & \text{soit } \boxed{u_1 = -\frac{5}{3}}; \\ u_2 &= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1, & \text{soit } \boxed{u_2 = -\frac{14}{9}}; \\ u_3 &= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{9}\right) + 2 - 2, & \text{soit } \boxed{u_3 = -\frac{14}{27}}. \end{aligned}$$

2) a. Pour tout entier $n \geq 4$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n \geq 0$ ».

Initialisation. $u_4 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{27}\right) + 3 - 2 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} \geq 0$: $P(4)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 4$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} &u_n \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{3}u_n \geq 0 && \text{(on multiplie par } \frac{1}{3} > 0) \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2 && \text{(on ajoute } n - 2) \\ \Leftrightarrow &u_{n+1} \geq n - 2 && \text{(définition de } u_{n+1}) \\ \Rightarrow &u_{n+1} \geq 0 && \text{(car } n \geq 4 \text{ donc } n - 2 \geq 2 > 0) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(4)$ est vraie et P est héréditaire à partir du rang 4, donc par récurrence :

$$\boxed{u_n \geq 0 \text{ pour tout entier } n \geq 4.}$$

b. Soit $n \geq 5$. Alors $n - 1 \geq 4$, donc d'après la question précédente $u_{n-1} \geq 0$. Par définition de la suite :

$$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + (n - 1) - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3.$$

Comme $\frac{1}{3}u_{n-1} \geq 0$, on obtient :

$$\boxed{u_n \geq n - 3 \text{ pour tout entier } n \geq 5.}$$

Vérification : $u_5 = \frac{553}{243} \approx 2,28 \geq 2.$

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\ &= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\frac{1}{3}v_n = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}.$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ pour tout n : la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2 \times 1 + 0 - \frac{21}{2}$, soit $v_0 = -\frac{25}{2}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n = -\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$. De $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$, on tire :

$$u_n = \frac{3n - \frac{21}{2} - v_n}{2} = \frac{1}{2} \left(3n - \frac{21}{2} + \frac{25}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right),$$

soit

$$u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

Vérification : $u_0 = \frac{25}{4} - \frac{21}{4} = 1$ et $u_1 = \frac{25}{12} + \frac{18}{12} - \frac{63}{12} = -\frac{20}{12} = -\frac{5}{3}$.

c. On sépare la somme en trois sommes :

$$S_n = \frac{25}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n \frac{21}{4}.$$

• Somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3} \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right).$$

• $\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

• $\sum_{k=0}^n \frac{21}{4} = \frac{21}{4}(n+1)$ (il y a $n+1$ termes).

Ainsi :

$$S_n = \frac{25}{4} \times \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1),$$

soit, en factorisant les deux derniers termes par $\frac{3}{4}(n+1)$:

$$S_n = \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) + \frac{3}{4}(n+1)(n-7).$$

Vérification : $S_0 = \frac{75}{8} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times 1 \times (-7) = \frac{25}{4} - \frac{21}{4} = 1 = u_0$, et $S_1 = \frac{75}{8} \times \frac{8}{9} + \frac{3}{4} \times 2 \times (-6) = \frac{25}{3} - 9 = -\frac{2}{3} = u_0 + u_1$.

Exercice 2

6 points

Un code est une liste ordonnée de 4 chiffres pris parmi les 9 chiffres non nuls $1, 2, \dots, 9$.

- 1) Un code est un 4-uplet d'éléments de $\{1, \dots, 9\}$ (répétitions autorisées). Il y en a 9^4 , soit 6 561 codes possibles.
- 2)
 - a. Un code à quatre chiffres différents est un arrangement de 4 éléments parmi 9 : $9 \times 8 \times 7 \times 6$, soit 3 024 codes.
 - b. On choisit la position du chiffre 1 : 4 choix ; puis chacune des trois autres positions reçoit un chiffre parmi les 8 chiffres non nuls différents de 1 : 8^3 choix. D'où $4 \times 8^3 = 4 \times 512$, soit 2 048 codes.
 - c. On choisit les deux positions du chiffre 1 : $\binom{4}{2} = 6$ choix ; puis on remplit les deux positions restantes, dans l'ordre, avec deux chiffres différents pris parmi les 8 chiffres autres que 1 : $8 \times 7 = 56$ choix. D'où 6×56 , soit 336 codes.
 - d. On choisit les deux positions du chiffre 1 parmi les quatre ; les deux autres reçoivent le chiffre 2. D'où $\binom{4}{2}$, soit 6 codes : 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211.
 - e. On choisit d'abord la paire de chiffres distincts utilisés : $\binom{9}{2} = 36$ choix (l'ordre des deux chiffres ne compte pas). Pour chaque paire, il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de placer les deux exemplaires du plus petit (question d.). D'où 36×6 , soit 216 codes.

Exercice 3

4 points

- a. Pour tout n , $\cos n \leq 1$, donc $u_n = n - \cos n \geq n - 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$, donc par comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- b. Pour tout n , $-1 \leq -\sin n \leq 1$, donc (en divisant par $n^2 + 1 > 0$) :

$$\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Or $\frac{n+1}{n^2+1} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$ tend vers $0 \times 1 = 0$, et de même $\frac{n-1}{n^2+1} \rightarrow 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- c. Pour tout n , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc (en divisant par $n+1 > 0$) :

$$\frac{3n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{n+1}.$$

Or $\frac{3n+1}{n+1} = \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 3$ et $\frac{3n-1}{n+1} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 3$.

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}$.

d. Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq \sin(2^n) \leq 1$, donc $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

e. On factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur : pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}.$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}$.

f. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donc par somme $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

Exercice 4

3 points

Soient n et k des entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$. Alors $0 \leq k-1 \leq n$, donc $\binom{n}{k-1}$ et $\binom{n}{k}$ sont bien définis, et on peut utiliser la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On réduit au même dénominateur $k!(n-k+1)!$, en utilisant $k! = k \times (k-1)!$ et $(n-k+1)! = (n-k+1) \times (n-k)!$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{k \times n!}{k!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \times n!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1) \times n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}. \end{aligned}$$

On reconnaît $\binom{n+1}{k}$, d'où :

$$\boxed{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Autre méthode (dénombrement). On compte les parties à k éléments de $E = \{1, \dots, n+1\}$, au nombre de $\binom{n+1}{k}$. Celles qui contiennent l'élément $n+1$ s'obtiennent en lui adjoignant $k-1$ éléments parmi

les n autres : il y en a $\binom{n}{k-1}$. Celles qui ne le contiennent pas sont les parties à k éléments de $\{1, \dots, n\}$: il y en a $\binom{n}{k}$. Ces deux cas s'excluent et couvrent toutes les parties, d'où l'égalité.

Vérification : pour $n = 4$ et $k = 2$, $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10 = \binom{5}{2}$.