

Calculatrice interdite

Exercice 1

7 points

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

- 1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- 2)
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
- 3) On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
 - b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.
 - c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

Exercice 2

6 points

Le code confidentiel d'une carte bancaire est un nombre constitué de quatre chiffres, tous non nuls.

- 1) Quel est le nombre de codes possibles ?
- 2) Combien existe-t-il de codes :
 - a. formés de quatre chiffres différents ?
 - b. comportant une seule fois le chiffre 1 ?
 - c. comportant deux fois le chiffre 1, les deux autres chiffres étant différents entre eux ?
 - d. comportant deux fois le chiffre 1 et deux fois le chiffre 2 ?
 - e. comportant deux fois deux chiffres distincts ?

Exercice 3**4 points**

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants (pour $n \geq 1$).

a. $u_n = n - \cos n$

b. $u_n = \frac{n - \sin n}{n^2 + 1}$

c. $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{n + 1}$

d. $u_n = \frac{1}{n} \sin(2^n)$

e. $u_n = \frac{3n^2 + n + 1}{n^2 + 2n - 1}$

f. $u_n = \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 4**3 points**

Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n$, montrer que :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$