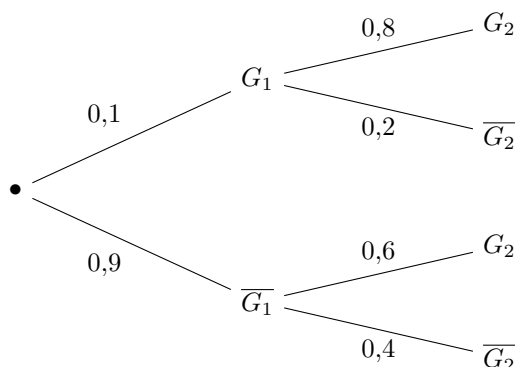


Exercice 1
7 points

- 1) On note $\overline{G_n}$ l'évènement « le joueur perd la n -ième partie ». D'après l'énoncé, $P(G_1) = 0,1$, $P_{G_1}(G_2) = 0,8$ et $P_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,6$, d'où l'arbre pondéré :



Les évènements G_1 et $\overline{G_1}$ forment une partition de l'univers; d'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54,$$

soit $p_2 = 0,62$.

- 2) On cherche $P_{G_2}(\overline{G_1})$:

$$P_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{27}{31},$$

soit $P_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{27}{31} \approx 0,871$.

- 3) L'évènement contraire de « gagner au moins une partie sur les trois premières » est « perdre les trois premières parties », c'est-à-dire $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}$. En suivant la branche correspondante d'un arbre à trois niveaux (après une défaite, la probabilité de perdre la partie suivante est $1 - 0,6 = 0,4$) :

$$P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) = 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144.$$

La probabilité cherchée est donc $1 - 0,144$, soit $0,856$.

- 4) Soit n un entier naturel non nul. G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers, avec $P(G_n) = p_n$ et $P(\overline{G_n}) = 1 - p_n$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(G_{n+1}) = P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= 0,8 p_n + 0,6 (1 - p_n) \\ &= 0,2 p_n + 0,6, \end{aligned}$$

soit $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$ pour tout $n \geq 1$.

- 5) Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la propriété : « $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ ».

Initialisation. $\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{15}{20} - \frac{13}{20} = \frac{2}{20} = 0,1 = p_1 : P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{5} p_n &= \frac{3}{20} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} && \text{(on multiplie par } \frac{1}{5} \neq 0) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} &= \frac{3}{20} + \frac{12}{20} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} && \text{(on ajoute } \frac{3}{5} = \frac{12}{20}) \\
 \Leftrightarrow p_{n+1} &= \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} && \text{(question 4 et } \frac{15}{20} = \frac{3}{4})
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(1)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

Vérification : la formule donne $p_2 = \frac{3}{4} - \frac{13}{100} = 0,62$ et $p_3 = 0,724 = 0,2 \times 0,62 + 0,6$.

6) Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, donc par produit et somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{4}.$$

À long terme, le joueur gagne une partie avec une probabilité proche de 0,75.

7) Pour tout $n \geq 1$, $\frac{3}{4} - p_n = \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{13}{4 \times 5^n}$. Ainsi :

$$\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \Leftrightarrow \frac{13}{4 \times 5^n} < 10^{-7} \Leftrightarrow 5^n > \frac{13}{4} \times 10^7 \Leftrightarrow 5^n > 32\,500\,000.$$

La suite (5^n) est strictement croissante. À la calculatrice : $5^{10} = 9\,765\,625 \leq 32\,500\,000$ et $5^{11} = 48\,828\,125 > 32\,500\,000$.

L'inégalité est donc vraie pour tous les entiers $n \geq 11$.

Exercice 2

6 points

1) À la calculatrice (mode suite, $u_{n+1} = 0,5 u_n^2 - u_n + 1,5$) :

- pour $a = 2,9$: $u_1 = 2,805$, $u_2 \approx 2,629$, $u_3 \approx 2,327$, ..., $u_7 \approx 1,003$, $u_8 \approx 1,000$. On conjecture que (u_n) est décroissante et converge vers 1;
- pour $a = 3,1$: $u_1 = 3,205$, $u_2 \approx 3,431$, $u_3 \approx 3,955$, $u_5 \approx 10,53$, $u_7 \approx 1\,032$. On conjecture que (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

- 2) a. La suite (u_n) converge vers ℓ , donc (u_{n+1}) aussi. La fonction f est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$; par conséquent $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. Par unicité de la limite, l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $\ell = f(\ell)$, soit

$$\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}.$$

- b. On résout cette équation :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2} \iff \frac{1}{2}\ell^2 - 2\ell + \frac{3}{2} = 0 \iff \ell^2 - 4\ell + 3 = 0.$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0, \text{ d'où deux solutions } \ell_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \text{ et } \ell_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Les valeurs possibles de ℓ sont donc $\boxed{1 \text{ et } 3}$. (Vérification : $f(1) = 1$ et $f(3) = 4,5 - 3 + 1,5 = 3$.)

- 3) a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x - 1$. Pour $x \geq 1$, $f'(x) \geq 0$ (et ne s'annule qu'en 1) : f est croissante sur $\boxed{[1; +\infty[}$.

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

Initialisation. $u_0 = 2,9$ et $u_1 = f(2,9) = 4,205 - 2,9 + 1,5 = 2,805$. On a bien $1 \leq 2,805 \leq 2,9$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Les nombres 1 , u_{n+1} et u_n appartiennent à $[1; +\infty[$, où f est croissante :

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ \implies f(1) &\leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad (f \text{ croissante sur } [1; +\infty[) \\ \iff 1 &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \quad (\text{car } f(1) = 1 \text{ et } u_{k+1} = f(u_k)) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{1 \leq u_{n+1} \leq u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- c. D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 1 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ .

D'après la question 2, $\ell = 1$ ou $\ell = 3$. Or (u_n) est décroissante, donc $u_n \leq u_0 = 2,9$ pour tout n , et par passage à la limite $\ell \leq 2,9$. Donc $\ell \neq 3$ et

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}.$$

- 4) a. On raisonne par l'absurde : supposons que (u_n) soit majorée. Croissante et majorée, elle convergerait (théorème de convergence monotone) vers un réel ℓ qui, d'après la question 2, vaudrait 1 ou 3.

Or (u_n) est croissante, donc $u_n \geq u_0 = 3,1$ pour tout n , et par passage à la limite $\ell \geq 3,1$: c'est impossible puisque $1 < 3,1$ et $3 < 3,1$.

La suite (u_n) n'est donc pas majorée.

- b. La suite (u_n) est croissante et non majorée, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, ce qui confirme la conjecture de la question 1.

Exercice 3

7 points

Partie A

- 1) On note N l'évènement « le numéro est compris entre 1 et 15 » et E l'évènement « la roue s'arrête sur une étoile ». Les numéros sont équiprobables : $P(N) = \frac{15}{50} = 0,3$ et $P(\bar{N}) = 0,7$. De plus $P_N(E) = \frac{8}{10} = 0,8$ et $P_{\bar{N}}(E) = \frac{1}{10} = 0,1$.
 D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de gagner un bon d'achat lors d'un jeu est :

$$p = P(E) = 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,1 = 0,24 + 0,07 = 0,31.$$

Chaque jeu est une épreuve de Bernoulli de succès « gagner un bon d'achat », de probabilité 0,31. Les 100 jeux simulés sont identiques et indépendants, et X compte le nombre de succès : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,31)$.

- 2) $P(X = 30) = \binom{100}{30} \times 0,31^{30} \times 0,69^{70}$, soit à la calculatrice $P(X = 30) \approx 0,0848$.
- 3) À la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) : $P(X \leq 20) \approx 0,0096$.
- 4) « Au moins la moitié des jeux » correspond à $X \geq 50$:

$$P(X \geq 50) = 1 - P(X \leq 49) \approx 0,0001,$$

(plus précisément $P(X \geq 50) \approx 5,7 \times 10^{-5}$) : cet évènement est très peu probable.

- 5) Le montant total offert est $10X$ euros. Par linéarité de l'espérance :

$$E(10X) = 10 E(X) = 10 \times 100 \times 0,31 = 10 \times 31 = 310.$$

Le montant moyen offert pour 100 clients est de 310 €. Comme $310 > 250$, le budget prévisionnel n'est pas suffisant : en moyenne, il manque 60 € par tranche de 100 clients.

Partie B

- 1) **Loi de Y .** Le numéro k de la carte prend chacune des valeurs $1, 2, \dots, 50$ avec la probabilité $\frac{1}{50}$, et $Y = \frac{k}{2}$. Donc Y prend les 50 valeurs $0,5; 1; 1,5; \dots; 25$ et

$$P\left(Y = \frac{k}{2}\right) = \frac{1}{50} = 0,02 \quad \text{pour tout entier } k \text{ de } 1 \text{ à } 50.$$

Loi de Z . La roue a 1 secteur étoilé sur 10 : Z prend la valeur 50 avec la probabilité 0,1 et la valeur

0 avec la probabilité 0,9.

z_i	0	50
$P(Z = z_i)$	0,9	0,1

2) Pour Y . On utilise $1+2+\dots+50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1\,275$ et $1^2+2^2+\dots+50^2 = \frac{50 \times 51 \times 101}{6} = 42\,925$ (ou les listes de la calculatrice) :

$$E(Y) = \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} \frac{k}{2} = \frac{1\,275}{100}, \quad \text{soit } \boxed{E(Y) = 12,75}.$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} \frac{k^2}{4} = \frac{42\,925}{200} = 214,625,$$

donc, d'après la formule de König-Huygens :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 214,625 - 12,75^2 = 214,625 - 162,5625,$$

$$\text{soit } \boxed{V(Y) = 52,0625 \approx 52,06}.$$

Pour Z .

$$E(Z) = 0 \times 0,9 + 50 \times 0,1, \quad \text{soit } \boxed{E(Z) = 5}.$$

$$V(Z) = (0 - 5)^2 \times 0,9 + (50 - 5)^2 \times 0,1 = 22,5 + 202,5, \quad \text{soit } \boxed{V(Z) = 225}.$$

($Z = 50B$ où B suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,1 : on retrouve $V(Z) = 50^2 \times 0,1 \times 0,9 = 225$.)

3) La somme des montants gagnés est $Y + Z$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y + Z) = E(Y) + E(Z) = 12,75 + 5, \quad \text{soit } \boxed{E(Y + Z) = 17,75}.$$

Avec les nouvelles règles, on tourne toujours la même roue, quel que soit le numéro tiré : le résultat de la roue ne dépend pas de la carte, donc Y et Z sont indépendantes. La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est la somme des variances :

$$V(Y + Z) = V(Y) + V(Z) = 52,0625 + 225, \quad \text{soit } \boxed{V(Y + Z) = 277,0625 \approx 277,06}.$$

En moyenne, un client gagne donc 17,75 € en bons d'achat avec les nouvelles règles.