

Calculatrice autorisée

## Exercice 1

7 points

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

- $G_n$  l'évènement « le joueur gagne la  $n$ -ième partie »;
- $p_n$  la probabilité de l'évènement  $G_n$ .

On a donc  $p_1 = 0,1$ .

- 1) Montrer que  $p_2 = 0,62$ . On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- 2) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
- 3) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
- 4) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$ .
- 5) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ .
- 6) Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- 7) Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$  a-t-on :  $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$  ?

## Exercice 2

6 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit  $a$  un réel positif. On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = a$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , suivant différentes valeurs de  $u_0 = a$ .

- 1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , pour  $a = 2,9$  puis pour  $a = 3,1$ .
- 2) Dans cette question, on suppose que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ .
  - a. Montrer que  $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$ .
  - b. Montrer que les valeurs possibles de  $\ell$  sont 1 et 3.
- 3) Dans cette question, on prend  $a = 2,9$ .
  - a. Montrer que  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .

- b. Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .
  - c. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
- 4) Dans cette question, on prend  $a = 3,1$  et on admet que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- a. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée.
  - b. En déduire le comportement de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 3

7 points

Une grande enseigne décide d'organiser dans ses magasins un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes.

- **Étape 1** : chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre entier de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert.
- **Étape 2** : si le client découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile. Sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue qu'il fait tourner s'arrête sur une étoile.

#### Partie A

Dans un premier temps, on peut gagner des bons d'achat de 10 €. Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 € par tranche de 100 clients y participant. Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 répétitions indépendantes du jeu. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés.

- 1) Quelle loi suit  $X$  ? Donner ses paramètres.
- 2) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 30 bons d'achat gagnés.
- 3) Calculer la probabilité que 20 bons d'achat ou moins soient gagnés.
- 4) Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des jeux fassent gagner un bon d'achat.
- 5) Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat ? Le budget prévisionnel est-il suffisant ?

#### Partie B

Lors de la dernière semaine de l'action, les règles du jeu changent : on tire toujours une carte et on gagne un bon d'achat d'un montant, en euros, égal à la moitié du nombre indiqué sur la carte. Puis on tourne systématiquement la roue qui n'affiche qu'une seule étoile et on gagne un bon d'achat supplémentaire d'un montant de 50 € si la roue s'arrête sur l'étoile.

On note  $Y$  et  $Z$  les variables aléatoires qui donnent les montants, en euros, des bons d'achat gagnés respectivement pendant la première et la deuxième étape, avec ces nouvelles règles.

- 1) Établir les lois de  $Y$  et de  $Z$ .
- 2) Calculer l'espérance et la variance de  $Y$  et de  $Z$  (arrondir au centième).
- 3) Calculer l'espérance et la variance de la somme des montants des bons d'achat gagnés.