

Exercice 1

6 points

- 1) On ne peut pas conclure directement : $\sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. On encadre.
 Pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $-2 \leq 2 \sin(x) \leq 2$. Comme $e^x > 0$, on peut diviser par e^x sans changer le sens des inégalités :

$$-\frac{2}{e^x} \leq f(x) \leq \frac{2}{e^x}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad -2e^{-x} \leq f(x) \leq 2e^{-x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, et ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = 0$.
 D'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$$

- 2) On commence par la fonction sous la racine : $u(x) = \frac{4x^2 + 7}{x^2 + 1}$. En $-\infty$, numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$ (forme indéterminée) : on factorise par x^2 . Pour tout $x \neq 0$:

$$u(x) = \frac{x^2 \left(4 + \frac{7}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{4 + \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \frac{4}{1} = 4$.

De plus $\lim_{X \rightarrow 4} \sqrt{X} = \sqrt{4} = 2$. Par composition :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2}.$$

- 3) On factorise : pour tout $x \geq 0$, $h(x) = x(4 - \cos(x))$. Le cosinus n'a pas de limite en $+\infty$: on minore.

Pour tout réel x , $\cos(x) \leq 1$, donc $4 - \cos(x) \geq 3$. Comme $x \geq 0$, en multipliant par x :

$$h(x) \geq 3x \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$. D'après le théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty}.$$

Exercice 2

9 points

- 1) On interroge 500 jeunes. Pour chacun, il y a deux issues : le succès « le jeune connaît la radio », de probabilité $p = 0,25$, et l'échec. La population des 15-24 ans de la région étant très grande devant 500, on assimile le choix des 500 jeunes à 500 tirages avec remise : ce sont 500 répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.

X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale

$$\mathcal{B}(500; 0,25).$$

2) À la calculatrice (fonctions de la loi binomiale avec $n = 500$ et $p = 0,25$) :

a. $P(X = 120) = \binom{500}{120} \times 0,25^{120} \times 0,75^{380}$, soit $P(X = 120) \approx 0,036$.

b. « Au maximum 130 » signifie $X \leq 130$: $P(X \leq 130) \approx 0,717$.

c. « Au moins 135 » signifie $X \geq 135$, événement contraire de $X \leq 134$:

$$P(X \geq 135) = 1 - P(X \leq 134), \quad \text{soit} \quad P(X \geq 135) \approx 0,163.$$

3) Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, $E(X) = np$:

$$E(X) = 500 \times 0,25, \quad \text{soit} \quad E(X) = 125.$$

Interprétation : si l'on réalisait un très grand nombre d'enquêtes auprès de 500 jeunes, on trouverait en moyenne 125 jeunes connaissant la radio SKYMATH par enquête.

4) a. On affiche à la calculatrice le tableau des valeurs de $P(X \leq k)$:

k	108	109	140	141
$P(X \leq k)$	$\approx 0,0425$	$\approx 0,0531$	$\approx 0,9439$	$\approx 0,9544$

• $P(X \leq 108) \leq 0,05$ et $P(X \leq 109) > 0,05$: comme $P(X \leq k)$ augmente avec k , le plus petit entier qui convient est $a = 109$.

• $P(X \leq 140) < 0,95$ et $P(X \leq 141) \geq 0,95$: le plus petit entier qui convient est $b = 141$.

b. On pose $I = [109; 141]$. Comme X ne prend que des valeurs entières, $P(X < 109) = P(X \leq 108)$, donc

$$P(X \in I) = P(109 \leq X \leq 141) = P(X \leq 141) - P(X \leq 108) \approx 0,9544 - 0,0425,$$

soit $P(X \in I) \approx 0,912 \geq 0,9$. L'intervalle

$$I = [109; 141]$$

convient (avec $P(X \leq 108) \leq 0,05$ et $P(X \leq 141) \geq 0,95$, on a directement $P(X \in I) \geq 0,95 - 0,05 = 0,9$).

Interprétation : si 25 % des jeunes de la région connaissent réellement la radio, alors dans au moins 90 % des enquêtes auprès de 500 jeunes, le nombre de jeunes connaissant la radio sera compris entre 109 et 141.

c. On a observé 148 jeunes connaissant la radio, et $148 \notin I$.

Si l'estimation des dirigeants (25 %) était exacte, la probabilité d'obtenir un résultat en dehors de I serait

$$P(X \notin I) = 1 - P(X \in I) \approx 1 - 0,912 = 0,088 \leq 0,1.$$

Le résultat observé fait donc partie des résultats peu probables sous cette hypothèse. On peut remettre en cause l'estimation de 25 %, avec un risque de se tromper inférieur à 10 %.

La proportion observée, $\frac{148}{500} = 0,296$, laisse penser que la radio est en réalité connue par plus de 25 % des 15-24 ans de la région.

Exercice 3

5 points

- 1) Pour chacun des 250 acheteurs de billet, il y a deux issues : le succès « la personne vient au concert », de probabilité $p = 0,9$, et l'échec. On suppose que les acheteurs se décident indépendamment les uns des autres : ce sont 250 répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.

X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale

$$\mathcal{B}(250; 0,9).$$

- 2) Avec 230 places, l'entreprise ne satisfait pas tout le monde lorsque plus de 230 personnes se présentent, c'est-à-dire lorsque $X > 230$, soit $X \geq 231$:

$$P(X > 230) = 1 - P(X \leq 230) \approx 1 - 0,8793, \quad \text{soit} \quad P(X > 230) \approx 0,12.$$

Il y a donc environ 12 % de risque de ne pas pouvoir accueillir tout le monde.

- 3) Avec une salle de N places, des personnes sont déçues lorsque $X > N$. On cherche le plus petit entier N tel que

$$P(X > N) \leq 0,02 \iff 1 - P(X \leq N) \leq 0,02 \iff P(X \leq N) \geq 0,98.$$

À la calculatrice :

$$P(X \leq 233) \approx 0,9691 < 0,98 \quad \text{et} \quad P(X \leq 234) \approx 0,9825 \geq 0,98.$$

Comme $P(X \leq N)$ augmente avec N , le plus petit entier qui convient est $N = 234$: la salle doit contenir

$$234 \text{ places}.$$

Vérification : avec 234 places, le risque de décevoir des personnes est $P(X > 234) \approx 0,018 \leq 0,02$; avec 233 places, il serait d'environ $0,031 > 0,02$.