

## Exercice 1

9 points

- 1) a. On répète 30 fois, de manière identique, l'épreuve « examiner un article », qui n'a que deux issues :

- succès : « l'article est défectueux », de probabilité  $p = 0,1$  ;
- échec : « l'article n'est pas défectueux », de probabilité  $1 - p = 0,9$ .

La production étant en grande série, on considère que les 30 articles sont indépendants les uns des autres : on a donc un schéma de Bernoulli de 30 épreuves, et  $X$  compte le nombre de succès.

Ainsi  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(30; 0,1)$ , de paramètres  $n = 30$  et  $p = 0,1$ .

- b.  $X$  compte un nombre d'articles défectueux parmi 30 :  $X$  prend les valeurs entières

$$0, 1, 2, \dots, 30.$$

- 2) Pour une loi binomiale,  $E(X) = np$  :

$$E(X) = 30 \times 0,1, \quad \text{soit} \quad E(X) = 3.$$

Interprétation : si l'on considère un grand nombre de livraisons de 30 articles, il y a *en moyenne* 3 articles défectueux par livraison.

- 3) a. Pour tout entier  $k$  entre 0 et 30,  $P(X = k) = \binom{30}{k} \times 0,1^k \times 0,9^{30-k}$ . Donc

$$P(X = 3) = \binom{30}{3} \times 0,1^3 \times 0,9^{27} = 4\,060 \times 0,1^3 \times 0,9^{27},$$

$$\text{soit} \quad P(X = 3) \approx 0,2361.$$

Interprétation : la probabilité qu'il y ait exactement 3 articles défectueux parmi les 30 reçus est d'environ 0,2361 (soit environ 23,6 %).

- b. À la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale, « binomFRép » ou « BinomialCD ») :

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 4), \quad \text{soit} \quad P(X \leq 4) \approx 0,8245.$$

- c. L'événement « au moins un article défectueux » est l'événement  $X \geq 1$ , contraire de  $X = 0$  :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^{30},$$

$$\text{soit} \quad P(X \geq 1) \approx 0,9576.$$

- 4) La fonction  $k \mapsto P(X \leq k)$  est croissante. À la calculatrice (tableau de valeurs de la fonction de répartition) :

$$P(X \leq 9) \approx 0,9995 < 0,9999 \quad \text{et} \quad P(X \leq 10) \approx 0,99991 \geq 0,9999.$$

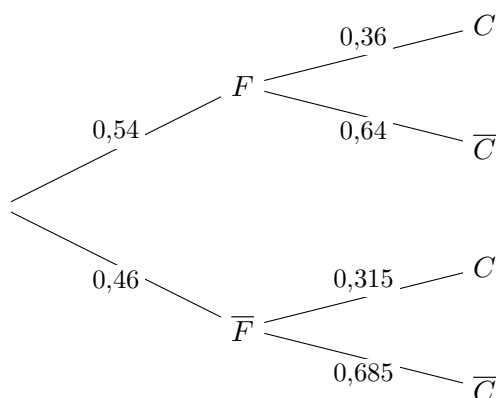
Le plus petit entier cherché est donc  $k = 10$ .

Remarque : arrondie à  $10^{-4}$ ,  $P(X \leq 10)$  s'affiche 0,9999 ; sa valeur plus précise 0,99991 confirme qu'elle dépasse bien 0,9999, ce qui n'est pas le cas de  $P(X \leq 9) \approx 0,99955$ .

## Exercice 2

6 points

- 1) D'après l'énoncé :  $P(F) = 0,54$ ,  $P_F(C) = 0,36$  et  $P_{\bar{F}}(C) = 0,315$  ( $\bar{F}$  : « l'élève est un garçon »).  
On complète chaque nœud à 1 :



- 2) On cherche  $P(\bar{F} \cap \bar{C})$  :

$$P(\bar{F} \cap \bar{C}) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(\bar{C}) = 0,46 \times 0,685, \quad \text{soit } \boxed{P(\bar{F} \cap \bar{C}) = 0,3151}.$$

- 3)  $F$  et  $\bar{F}$  forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(F \cap C) + P(\bar{F} \cap C) \\ &= P(F) \times P_F(C) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(C) \\ &= 0,54 \times 0,36 + 0,46 \times 0,315 \\ &= 0,1944 + 0,1449, \end{aligned}$$

soit  $\boxed{P(C) = 0,3393}$ , comme annoncé.

- 4) On cherche  $P_C(F)$  :

$$P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0,1944}{0,3393}, \quad \text{soit } \boxed{P_C(F) \approx 0,5729}.$$

Vérification :  $P_C(F) > P(F) = 0,54$ , ce qui est cohérent car les filles déjeunent plus souvent à la cantine que les garçons.

## Exercice 3

5 points

- 1) On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  et, par somme,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x^2} - 2 \right) = -2$ .

Par composition avec la fonction  $X \mapsto X^4$  (ou par produit), et comme  $(-2)^4 = 16$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x^2} - 2 \right)^4 = 16.$$

2)  $f = \sqrt{u}$  avec  $u(x) = 20 - 5x^2$ .

**Ensemble de définition.**  $f(x)$  existe si et seulement si  $u(x) \geq 0$  :

$$20 - 5x^2 \geq 0 \iff 5x^2 \leq 20 \iff x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2.$$

$f$  est donc définie sur  $[-2; 2]$ .

**Dérivabilité.** La fonction racine carrée est dérivable sur  $]0; +\infty[$  seulement (pas en 0). La fonction  $f$  est donc dérivable là où  $u(x) > 0$ , c'est-à-dire sur

$$]-2; 2[.$$

**Dérivée.**  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $u'(x) = -10x$ . Comme  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ , pour tout  $x \in ]-2; 2[$  :

$$f'(x) = \frac{-10x}{2\sqrt{20 - 5x^2}}, \quad \text{soit} \quad f'(x) = \frac{-5x}{\sqrt{20 - 5x^2}}.$$

Vérification :  $f'(0) = 0$ , cohérent avec le maximum de  $f$  en 0 ( $f(0) = \sqrt{20}$ ), puisque  $20 - 5x^2$  est maximal en  $x = 0$ .