

Exercice 1

3 points

- 1) a. En $+\infty$, on a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$ et $x \neq 5$, on factorise par x :

$$f(x) = \frac{x \left(3 - \frac{7}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{5}{x} \right)} = \frac{3 - \frac{7}{x}}{1 - \frac{5}{x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$, donc par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{1} = 3$.

b. Le même calcul vaut en $-\infty$, car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

c. $\lim_{x \rightarrow 5} (3x - 7) = 3 \times 5 - 7 = 8$. Pour $x < 5$, $x - 5 < 0$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} (x - 5) = 0^-$.

Par quotient (« $\frac{8}{0^-}$ ») : $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = -\infty$.

d. Pour $x > 5$, $x - 5 > 0$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} (x - 5) = 0^+$ et, par quotient (« $\frac{8}{0^+}$ ») : $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x) = +\infty$.

- 2) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$: la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- La limite de f en 5 (à gauche comme à droite) est infinie : la droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à la courbe de f .

Exercice 2

3 points

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ la propriété : « $S_n = \frac{n}{n+1}$ ».

Initialisation. $S_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. On remarque que $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{n}{n+1} \\
 \Leftrightarrow S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{on ajoute } \frac{1}{(n+1)(n+2)}) \\
 \Leftrightarrow S_{n+1} &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{même dénominateur}) \\
 \Leftrightarrow S_{n+1} &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{identité remarquable}) \\
 \Leftrightarrow S_{n+1} &= \frac{n+1}{n+2} \quad (\text{on simplifie par } n+1 \neq 0)
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(1)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$S_n = \frac{n}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Vérification : $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ et $S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$.

2) On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; on factorise par n : $S_n = \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

Exercice 3

3 points

1) **Faux.** Un contre-exemple suffit. La suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0 et n'a aucun terme nul. Mais

$$u_n + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+1} + (n+1), \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) = +\infty$: la suite $\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$ diverge. L'affirmation est **fausse**.

Remarque : si la limite ℓ de (u_n) est *non nulle*, alors $\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\ell + \frac{1}{\ell}$; c'est le cas $\ell = 0$ qui met l'affirmation en défaut.

2) Pour un ensemble E à 9 éléments :

- le nombre de permutations de E est $9! = 362\,880$;
- le nombre de 6-uplets d'éléments de E (éléments de E^6) est $9^6 = 531\,441$.

Comme $362\,880 < 531\,441$, il y a moins de permutations que de 6-uplets : l'affirmation est **fausse**.

- 3) Un duel correspond à une partie à 2 éléments de l'ensemble des 10 escrimeurs (l'ordre des deux adversaires ne compte pas, et chaque paire se rencontre une seule fois). Le nombre de duels est donc

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

L'affirmation est vraie.

Exercice 4

6 points

- 1) D'une année à la suivante, 20 % des abonnés partent : il en reste 80 %, soit $\left(1 - \frac{20}{100}\right) a_n = 0,8 a_n$.
On ajoute les 450 nouveaux abonnements, d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_{n+1} = 0,8 a_n + 450}.$$

- 2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $a_n \geq 2\,250$ ».

Initialisation. $a_0 = 3\,500 \geq 2\,250$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} a_n &\geq 2\,250 \\ \iff 0,8 a_n &\geq 1\,800 && \text{(on multiplie par } 0,8 > 0 \text{)} \\ \iff 0,8 a_n + 450 &\geq 2\,250 && \text{(on ajoute 450)} \\ \iff a_{n+1} &\geq 2\,250 && \text{(car } a_{n+1} = 0,8 a_n + 450 \text{)} \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{a_n \geq 2\,250 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n = 0,8 a_n + 450 - a_n = -0,2 a_n + 450$.

D'après la question précédente, $a_n \geq 2\,250$, donc $-0,2 a_n \leq -0,2 \times 2\,250 = -450$ (on multiplie par $-0,2 < 0$, le sens change), puis $-0,2 a_n + 450 \leq 0$.

Ainsi $a_{n+1} - a_n \leq 0$ pour tout n : la suite (a_n) est décroissante.

Vérification : $a_0 = 3\,500$, $a_1 = 3\,250$, $a_2 = 3\,050$.

- c. La suite (a_n) est décroissante et minorée par 2 250. D'après le théorème de convergence monotone, (a_n) est convergente.

- 3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2\,250 = 0,8 a_n + 450 - 2\,250 = 0,8 a_n - 1\,800 = 0,8 (a_n - 2\,250) = 0,8 b_n.$$

La suite (b_n) est donc géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 2\,250 = 3\,500 - 2\,250$, soit $b_0 = 1\,250$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = b_0 \times q^n = 1\,250 \times 0,8^n$. Comme $a_n = b_n + 2\,250$:

$$a_n = 1\,250 \times 0,8^n + 2\,250.$$

Vérification : $a_1 = 1\,250 \times 0,8 + 2\,250 = 3\,250$ et $a_2 = 1\,250 \times 0,64 + 2\,250 = 3\,050$.

c. Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1\,250 \times 0,8^n = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2\,250.$$

Interprétation : à long terme, le nombre d'abonnés diminue et se stabilise autour de 2 250 abonnés.

4) Le seuil de fermeture, 2 300, est supérieur à la limite 2 250 : comme (a_n) décroît vers 2 250, elle finira par passer sous 2 300. Le directeur devra donc fermer un jour.

On cherche le plus petit entier n tel que $a_n < 2\,300$:

$$a_n < 2\,300 \iff 1\,250 \times 0,8^n < 50 \iff 0,8^n < 0,04.$$

À la calculatrice (tableau de valeurs de a_n) :

$$a_{14} = 1\,250 \times 0,8^{14} + 2\,250 \approx 2\,304,98 \geq 2\,300$$

$$a_{15} = 1\,250 \times 0,8^{15} + 2\,250 \approx 2\,293,98 < 2\,300.$$

La suite étant décroissante, $a_n < 2\,300$ pour tout $n \geq 15$, et seulement pour ceux-là. Le plus petit rang est $n = 15$, qui correspond à l'année $2020 + 15$: le directeur devra fermer en 2035.

Remarque : avec le logarithme népérien, $0,8^n < 0,04 \iff n \ln 0,8 < \ln 0,04 \iff n > \frac{\ln 0,04}{\ln 0,8} \approx 14,43$ (on divise par $\ln 0,8 < 0$), ce qui redonne $n = 15$.

Exercice 5

5 points

1) On choisit les musées sans ordre : on compte des combinaisons (parties).

a. Choisir 6 musées parmi 13, c'est choisir une partie à 6 éléments d'un ensemble à 13 éléments :

$$\binom{13}{6} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \boxed{1\,716} \text{ façons.}$$

b. Exactement 2 musées d'art et d'histoire, donc $6 - 2 = 4$ musées scientifiques ou technologiques. On choisit les 2 musées d'art parmi 8, puis les 4 musées scientifiques parmi 5 (principe multiplicatif) :

$$\binom{8}{2} \times \binom{5}{4} = 28 \times 5 = \boxed{140} \text{ façons.}$$

c. On passe par l'événement contraire : « au plus 1 musée scientifique », c'est-à-dire 0 ou 1.

- 0 musée scientifique : les 6 musées sont d'art, $\binom{8}{6} = 28$ façons ;
- 1 musée scientifique et 5 d'art : $\binom{5}{1} \times \binom{8}{5} = 5 \times 56 = 280$ façons.

Le nombre de façons de visiter au moins 2 musées scientifiques ou technologiques est donc

$$1\,716 - 28 - 280 = \boxed{1\,408}.$$

Vérification par la somme directe : $\binom{5}{2} \binom{8}{4} + \binom{5}{3} \binom{8}{3} + \binom{5}{4} \binom{8}{2} + \binom{5}{5} \binom{8}{1} = 700 + 560 + 140 + 8 = 1\,408$.

- 2) a. Ordonner les 6 musées choisis revient à compter les permutations d'un ensemble à 6 éléments :

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \boxed{720} \text{ façons.}$$

- b. Les 6 visites se répartissent sur 5 jours : quatre jours à un musée et un jour à deux musées.

- On choisit d'abord les 2 musées visités le même jour, sans ordre entre eux : $\binom{6}{2} = 15$ façons.
- On obtient alors 5 « blocs » (la paire et les 4 autres musées), à répartir sur les 5 jours : $5! = 120$ façons.

Par le principe multiplicatif : $15 \times 120 = \boxed{1\,800}$ façons d'organiser les visites.

Vérification : parmi les 720 ordres de la question précédente, on peut regrouper deux musées consécutifs de 5 façons, soit $720 \times 5 = 3\,600$; chaque organisation est alors comptée deux fois (les deux ordres possibles de la paire), d'où $\frac{3\,600}{2} = 1\,800$.

Bonus

1 point

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et, comme $(n+1)! = (n+1) \times n!$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \times \frac{\sqrt{n!}}{3^n} = \frac{3\sqrt{n!}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n!}} = \frac{3}{\sqrt{n+1}}.$$

Si $n \geq 15$, alors $n+1 \geq 16$, donc $\sqrt{n+1} \geq 4$ (la fonction racine carrée est croissante) et $\frac{3}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{3}{4}$.

Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$ et, en multipliant par $u_n > 0$: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$ pour tout $n \geq 15$.

- 2) Pour tout entier $n \geq 15$, on note $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15}$ ».

Initialisation. $\left(\frac{3}{4}\right)^0 u_{15} = u_{15}$ et $0 \leq u_{15} \leq u_{15}$: $P(15)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 15$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15} \\ \iff 0 &\leq \frac{3}{4} u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-15} u_{15} \quad (\text{on multiplie par } \frac{3}{4} > 0) \\ \implies 0 &\leq u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-15} u_{15} \quad (\text{car } 0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n \text{ d'après 1)}) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15}$ pour tout $n \geq 15$.

3) Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15} = 0$ (u_{15} est un nombre fixé).

D'après le théorème des gendarmes, avec $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.