

Calculatrice autorisée

Exercice 1

3 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $f(x) = \frac{3x-7}{x-5}$.

1) Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c. $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x)$

d. $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x)$

2) En déduire les asymptotes à la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 2

3 points

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n}{n+1}$.

2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 3

3 points

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) (u_n) est une suite convergente qui ne possède aucun terme nul.

Affirmation : la suite $\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$ est convergente.

2) **Affirmation** : pour un ensemble à 9 éléments, il y a davantage de permutations que de 6-uplets.

3) Un groupe de 10 escrimeurs participe à une compétition. Chaque escrimeur doit rencontrer en duel, une et une seule fois, chacun des autres escrimeurs.

Affirmation : il faut organiser 45 duels au total.

Exercice 4

6 points

Un groupe de plusieurs salles de sport a ouvert en 2020, et 3 500 personnes se sont abonnées dès la première année. Chaque année, 20 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 450 nouveaux abonnements sont enregistrés. Le directeur du groupe estime qu'il devra fermer si le nombre d'abonnés devient inférieur à 2 300.

Pour tout entier naturel n , on note a_n le nombre d'abonnés au cours de l'année 2020 + n . On a donc $a_0 = 3 500$.

1) Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8 a_n + 450$.

2) a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $a_n \geq 2 250$.

- b. Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.
 - c. En déduire que la suite (a_n) est convergente.
- 3) On pose, pour tout entier naturel n , $b_n = a_n - 2\,250$.
- a. Montrer que (b_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme b_0 .
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1\,250 \times 0,8^n + 2\,250$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (a_n) . Interpréter ce résultat.
- 4) Le directeur devra-t-il fermer un jour ? Si oui, déterminer en quelle année, en justifiant.

Exercice 5

5 points

Timothée passe quelques jours dans une capitale européenne. Il est intéressé par 13 musées différents dans cette capitale :

- 8 musées d'art et d'histoire ;
- 5 musées scientifiques ou technologiques.

Lors de ce séjour, il n'aura le temps de visiter que 6 musées différents.

- 1) Dans un premier temps, on s'intéresse aux différentes façons de choisir ces 6 musées, sans tenir compte de l'ordre dans lequel Timothée les visitera.
 - a. Calculer le nombre de façons dont Timothée peut choisir ces 6 musées.
 - b. Combien a-t-il de façons de choisir ces musées de sorte qu'il visite exactement 2 musées d'art et d'histoire ?
 - c. Combien a-t-il de façons de choisir ces musées de sorte qu'il visite au moins 2 musées scientifiques ou technologiques ?
- 2) On prend maintenant en considération l'ordre dans lequel Timothée visitera ces musées.
 - a. On suppose que Timothée a déjà choisi ses 6 musées. Combien a-t-il de façons de les ordonner pour organiser les visites ?
 - b. Timothée a choisi ses 6 musées et décide d'en visiter un par jour, sauf un jour au cours duquel il en visitera deux. Combien a-t-il de façons d'organiser ces visites en respectant cette contrainte, sans préciser l'ordre des deux musées visités le même jour ?

Bonus

1 point

Pour celles et ceux qui ont traité tous les exercices précédents.

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{3^n}{\sqrt{n!}}$.

- 1) Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 15$: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$.
- 2) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 15$: $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15}$.
- 3) En déduire la limite de la suite (u_n) .