

Exercice 1

5 points

- 1) a. On factorise par le terme de plus haut degré : pour tout $n \geq 1$,

$$-3n^2 + 6n + 5 = n^2 \left(-3 + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2} \right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2} \right) = -3$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

Par produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2 + 6n + 5) = -\infty.$$

- b. Forme indéterminée « $\infty - \infty$ » : on multiplie par la quantité conjuguée. Pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}. \end{aligned}$$

Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}) = +\infty$, donc par quotient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0.$$

- c. Forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » : on factorise numérateur et dénominateur par n^2 . Pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{2+n-3n^2}{n^2+1} = \frac{n^2 \left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} - 3 \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} - 3}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Le numérateur tend vers -3 et le dénominateur vers 1 , donc par quotient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+n-3n^2}{n^2+1} = -3.$$

- 2) a. **Faux.** Contre-exemple : la suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée ($-1 \leq u_n \leq 1$), mais elle prend alternativement les valeurs 1 et -1 : elle ne peut pas converger.
(Si elle convergeait vers ℓ , l'intervalle $]\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}[$, de longueur 1 , devrait contenir à partir d'un certain rang à la fois 1 et -1 , distants de 2 : impossible.)

- b. **Vrai.** Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Supposons-la majorée par un réel M : pour tout n , $u_n \leq M$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]M; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : il existe donc un rang n tel que $u_n > M$, ce qui contredit $u_n \leq M$.

Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est donc pas majorée.

- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geq -1$, donc

$$3n + (-1)^n \geq 3n - 1.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - 1) = +\infty$. Par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n + (-1)^n) = +\infty.$$

4) a. On dit que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ si **tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

b. Soit (u_n) une suite telle que $u_n < 0$ pour tout n . Raisonnons par l'absurde et supposons que (u_n) converge vers un réel $\ell > 0$.

L'intervalle ouvert $]0; 2\ell[$ contient ℓ . Par définition de la convergence, il contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N : pour tout $n \geq N$, $u_n \in]0; 2\ell[$, donc $u_n > 0$. C'est en contradiction avec $u_n < 0$. Donc :

$$(u_n) \text{ ne peut pas converger vers une limite } \ell > 0.$$

Remarque. La limite peut en revanche être nulle : la suite définie par $u_n = -\frac{1}{n+1}$ a tous ses termes strictement négatifs et converge vers 0.

Exercice 2

4 points

1) $u_1 = \frac{u_0}{1+2u_0} = \frac{1}{1+2 \times 1}$, soit $u_1 = \frac{1}{3}$.

$$u_2 = \frac{u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}, \quad \text{soit} \quad u_2 = \frac{1}{5}.$$

2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 > 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$. Alors $1 + 2u_n > 1 > 0$; le numérateur u_n et le dénominateur $1 + 2u_n$ sont strictement positifs, donc leur quotient aussi :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} > 0.$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{-2u_n^2}{1+2u_n}.$$

D'après la question précédente, $u_n > 0$, donc $-2u_n^2 < 0$ et $1 + 2u_n > 0$: $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est **(strictement) décroissante**.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (question 2)a.). D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ donc x_n est bien défini, et :

$$x_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1 + 2u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 2 = x_n + 2.$$

La suite (x_n) est donc arithmétique, de raison $r = 2$ et de premier terme $x_0 = \frac{1}{u_0}$, soit $x_0 = 1$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_0 + nr = 1 + 2n$. Comme $x_n = \frac{1}{u_n}$, on a $u_n = \frac{1}{x_n}$, donc

$$u_n = \frac{1}{2n + 1}.$$

Vérification : $u_1 = \frac{1}{3}$ et $u_2 = \frac{1}{5}$, comme à la question 1).

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n + 1) = +\infty$, donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 3

5 points

1) On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2) Soit A un réel. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang N : pour tout $n \geq N$, $v_n > A$.

Pour tout $n \geq N$, on a alors $u_n \geq v_n > A$, donc $u_n \in]A; +\infty[$.

Ainsi, pour tout réel A , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir du rang N : par définition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

3) a. $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 3 = 4$: c'est bien la valeur annoncée.

$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 4 + 5$, soit $u_2 = 9$; $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 9 + 7$, soit $u_3 = 16$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ car $n \geq 0$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n > n^2$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $0^2 = 0$: $1 > 0$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &> n^2 \\ \Leftrightarrow u_n + 2n + 3 &> n^2 + 2n + 3 \quad (\text{on ajoute } 2n + 3) \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &> (n+1)^2 + 2 \quad (\text{car } u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \text{ et } n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2) \\ \Rightarrow u_{n+1} &> (n+1)^2 \quad (\text{car } (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$u_n > n^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$ (question c.) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison démontré à la question 2) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

e. Les premiers termes sont $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$, c'est-à-dire 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 . On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q(n)$ la propriété : « $u_n = (n+1)^2$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 = (0+1)^2$: $Q(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &= (n+1)^2 \\ \Leftrightarrow u_n + 2n + 3 &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \quad (\text{on ajoute } 2n + 3) \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &= n^2 + 4n + 4 \quad (\text{car } u_{n+1} = u_n + 2n + 3) \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &= (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2 \quad (\text{identité remarquable}) \end{aligned}$$

$Q(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence :

$$u_n = (n+1)^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Vérification : $u_4 = u_3 + 2 \times 3 + 3 = 16 + 9 = 25 = 5^2$.

Exercice 4

4,5 points

1) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3 = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2}w_n.$$

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 3$, soit

$$w_0 = -3.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n$, soit

$$w_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{3}{2^n}.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n + 3$, donc $u_n = 3 - \frac{3}{2^n}$.

$$\text{Vérification : } u_1 = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}; u_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 3 - \frac{3}{4}.$$

d. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2^n} = 0$.

Par somme, la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = 3 - \frac{3}{2^{n+1}}$.

Or $2^{n+1} \geq 2$, donc $\frac{3}{2^{n+1}} \leq \frac{3}{2} < 3$ et $u_{n+1} > 0$.

Ainsi $S_{n+1} - S_n > 0$: la suite (S_n) est **strictement croissante**.

b. Pour tout entier naturel k , $u_k = 3 + w_k$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (3 + w_k) = \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{n+1 \text{ termes}} + \sum_{k=0}^n w_k = 3(n+1) + \sum_{k=0}^n w_k.$$

La somme $\sum_{k=0}^n w_k$ est celle de $n+1$ termes consécutifs de la suite géométrique (w_n) , dont la raison $\frac{1}{2}$ est différente de 1 :

$$\sum_{k=0}^n w_k = w_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -3 \times 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = -6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

$$\text{D'où } S_n = 3(n+1) - 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

$$\text{Vérification : } S_1 = u_0 + u_1 = \frac{3}{2} \text{ et } 3 \times 2 - 6 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 6$.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3(n+1) = +\infty$. Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

3) **Faux**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} - s_n = x_{n+1}$: le sens de variation de (s_n) dépend du signe des termes x_n , et non du sens de variation de (x_n) .

Contre-exemple : la suite définie par $x_n = -\frac{1}{n+1}$.

• (x_n) est strictement croissante : pour tout n ,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

- (s_n) est strictement décroissante : pour tout n , $s_{n+1} - s_n = x_{n+1} = -\frac{1}{n+2} < 0$.

Les deux suites n'ont pas le même sens de variation : l'affirmation est fausse.

(Autre contre-exemple encore plus simple : $x_n = 1$ pour tout n ; (x_n) est constante alors que $s_n = n + 1$ est strictement croissante.)

Exercice 5

1,5 point

- 1) Le téléphone choisit 10 chansons parmi 80, sans ordre et sans répétition : un choix est une combinaison de 10 éléments parmi 80. Le nombre de choix est

$$\binom{80}{10} = \frac{80!}{10! \times 70!}$$

Sans calculatrice, cette écriture suffit. À titre indicatif, $\binom{80}{10} = 1\,646\,492\,110\,120$: plus de 1 600 milliards de choix.

- 2) Une playlist est un ordre d'enchaînement des 10 chansons choisies, c'est-à-dire une permutation de ces 10 chansons. Le nombre de playlists est

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1, \quad \text{soit} \quad \boxed{10! = 3\,628\,800}.$$

Défi

non noté

Pour tout entier $n \geq 1$, on écrit le quotient comme un produit de n facteurs :

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}{n \times n \times n \times \cdots \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}.$$

Chacun des facteurs $\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ est compris entre 0 et 1, donc leur produit aussi. On en déduit, pour tout $n \geq 1$:

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}.$$