

Calculatrice interdite

Exercice 1

5 points

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1) Déterminer, en rédigeant, les limites suivantes :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2 + 6n + 5);$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1});$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+n-3n^2}{n^2+1}.$

2) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

a. Une suite bornée est convergente.

b. Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée.

3) Déterminer, en justifiant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n + (-1)^n).$

4) a. **Cours.** Rappeler la définition d'une suite convergente vers un réel ℓ .

b. Démontrer qu'une suite dont tous les termes sont strictement négatifs ne peut pas converger vers une limite strictement positive.

Exercice 2

4 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}.$

1) Calculer u_1 et u_2 en détaillant les calculs.

2) a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Pourquoi peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ?

3) On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n par $x_n = \frac{1}{u_n}.$

a. Démontrer que la suite (x_n) est arithmétique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{2n+1}.$

c. En déduire la limite de la suite $(u_n).$

Exercice 3

5 points

1) **Cours.** Rappeler la définition d'une suite qui diverge vers $+\infty$.

2) Cours. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Démontrer qu'alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3) Application. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

- a. Vérifier que $u_1 = 4$, puis calculer u_2 et u_3 .
- b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
- d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier.
- e. Au vu des premiers termes de la suite, conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer cette conjecture.
On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

Exercice 4

4,5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$.
On définit la suite (S_n) pour tout entier naturel n par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- 1) Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_n - 3$.
 - a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
 - b. En déduire l'expression de w_n en fonction de n .
 - c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - \frac{3}{2^n}$.
 - d. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
- 2)
 - a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n) .
 - b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 3(n+1) - 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
On pourra utiliser la somme des termes d'une suite géométrique.
 - c. En déduire la limite de la suite (S_n) .

3) Dans cette question, toute trace de recherche, même partielle, sera prise en compte.

Soit (x_n) une suite numérique et (s_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$.

Dire, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« Les suites (x_n) et (s_n) ont le même sens de variation. »

Exercice 5**1,5 point**

Louison s'est constitué une sélection de 80 chansons sur son téléphone.

Lorsqu'elle part courir, son téléphone choisit au hasard 10 chansons parmi les 80 disponibles pour accompagner sa course.

- 1) Combien de choix différents de 10 chansons le téléphone peut-il faire ?
- 2) Ces 10 chansons sont ensuite enchaînées, dans un certain ordre, pour former une playlist de course.

Une fois les 10 chansons choisies par le téléphone, combien de playlists différentes sont possibles ?

Défi**non noté**

On rappelle que, pour tout entier $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$.