

Exercice 1

8 points

On rappelle que $E = \{a; b; c; d; e\}$ contient 5 éléments. Une mauvaise réponse annulant une bonne réponse, seules les lettres justes doivent être écrites.

Question	Réponses
1	c.
2	c.
3	a. et d.
4	c.
5	d.
6	c.
7	c.
8	b.

Explications.

- 1) $E \times E$ est l'ensemble des couples d'éléments de E : il y a 5 choix pour le premier élément et 5 pour le second, donc

$$\text{Card}(E \times E) = 5 \times 5 = 5^2 = 25.$$

On ne confond pas avec $2^5 = 32$ (nombre de parties de E) ni avec $5! = 120$.

- 2) $\{b; c; d\}$ est écrit entre accolades : c'est une partie de E à 3 éléments, **sans ordre**. C'est une combinaison de 3 éléments de E .
Ce n'est pas un arrangement ni un triplet (qui sont ordonnés et s'écrivent entre parenthèses), ni une permutation (qui utiliserait les 5 éléments).

- 3) $(d; a)$ est écrit entre parenthèses : c'est une liste **ordonnée** de 2 éléments, ici distincts. C'est donc un couple et aussi un arrangement de 2 éléments de E .
Ce n'est pas une combinaison (non ordonnée) ni une permutation (il faudrait les 5 éléments).

- 4) Une permutation de E est un arrangement de ses 5 éléments : il y en a

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120.$$

- 5) Pour un arrangement de 2 éléments distincts : 5 choix pour le premier, puis 4 pour le second, soit

$$5 \times 4 = 20.$$

$5^2 = 25$ compterait aussi les couples avec répétition comme $(a; a)$, et $\binom{5}{2} = 10$ ne tient pas compte de l'ordre.

- 6) Pour former une partie de E , on décide pour chacun des 5 éléments s'il en fait partie ou non (2

choix à chaque fois), d'où

$$2^5 = 32 \text{ sous-ensembles.}$$

Ce nombre inclut l'ensemble vide et E lui-même. $\binom{5}{2} = 10$ ne compte que les parties à 2 éléments.

7) Par symétrie des coefficients binomiaux, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, donc

$$\binom{24}{7} = \binom{24}{24-7} = \binom{24}{17}.$$

Vérification : $\binom{24}{7} = \binom{24}{17} = 346\,104$, alors que $\binom{17}{7} = 19\,448$ et $24 \times 7 = 168$; $\binom{7}{24} = 0$ car $24 > 7$.

8) D'après la formule de Pascal, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Avec $n = 23$ et $k = 8$:

$$\binom{23}{8} + \binom{23}{9} = \binom{24}{9}.$$

Vérification : $\binom{23}{8} + \binom{23}{9} = 490\,314 + 817\,190 = 1\,307\,504 = \binom{24}{9}$, alors que $\binom{24}{8} = 735\,471$.

Exercice 2

6 points

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise $(n+1)! = (n+1) \times n!$ et $(n+2)! = (n+2) \times (n+1) \times n!$.

a. $(n+1) \times n! = (n+1) \times n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = \boxed{(n+1)!}.$

b. $\frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{(n+1)!}{(n+2) \times (n+1)!} = \boxed{\frac{1}{n+2}}.$

c. $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = \boxed{(n+1)(n+2)}.$

2) On utilise $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.

a. $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = \boxed{21}.$

b. $\binom{9}{8} = \binom{9}{1} = \boxed{9}.$

c. $\binom{13}{0} = \boxed{1}$ (une seule partie à 0 élément : l'ensemble vide).

d. $\binom{12}{12} = \boxed{1}$ (une seule partie à 12 éléments : l'ensemble lui-même).

e. $\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = \boxed{66}$.

f. $\binom{20}{1} = \boxed{20}$.

Exercice 3

6 points

1) **Formule de Pascal.** Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n - 1$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dans le triangle de Pascal, chaque coefficient est la somme des deux coefficients situés juste au-dessus de lui (sur la ligne précédente, dans la même colonne et dans la colonne précédente).

2) On factorise par $31!$, en remarquant que $32! = 32 \times 31!$:

$$\begin{aligned} 31! + 32! &= 31! + 32 \times 31! \\ &= 31! \times (1 + 32) \\ &= 33 \times 31!. \end{aligned}$$

On a bien démontré que $\boxed{31! + 32! = 33 \times 31!}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(n+1)! = (n+1) \times n!$:

$$\begin{aligned} n! + (n+1)! &= n! + (n+1) \times n! \\ &= n! \times (1 + (n+1)) \\ &= \boxed{(n+2) \times n!}. \end{aligned}$$

Vérification avec $n = 31$: on retrouve $31! + 32! = 33 \times 31!$, le résultat de la question précédente.
Pour $n = 0$: $0! + 1! = 2 = 2 \times 0!$.