

Exercice 1

7 points

1) À la calculatrice, on obtient (valeurs arrondies au millième) :

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	1	3	3,667	3,889	3,963	3,988	3,996
b_n	7	5	4,333	4,111	4,037	4,012	4,004

Les termes a_n augmentent, les termes b_n diminuent, et les deux suites se rapprochent de 4.

Conjecture : (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, et les deux suites convergent vers 4.

2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{1}{3} u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, de premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = 7 - 1 = 6$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Vérification : $u_1 = 2 = b_1 - a_1 = 5 - 3$.

c. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$, c'est-à-dire $b_n - a_n > 0$. Ainsi $a_n < b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{u_n}{3} > 0,$$

donc la suite (a_n) est strictement croissante.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + 2b_n}{3} - b_n = \frac{a_n - b_n}{3} = -\frac{u_n}{3} < 0,$$

donc la suite (b_n) est strictement décroissante.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après 3), $a_n < b_n \leq b_0 = 7$: la suite (a_n) est croissante et majorée par 7, donc elle converge vers un réel ℓ .

De même, $b_n > a_n \geq a_0 = 1$: la suite (b_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel ℓ' .

Enfin $b_n - a_n = u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, donc $\ell' - \ell = 0$:

(a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ .

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} + \frac{a_n + 2b_n}{3} = \frac{3a_n + 3b_n}{3} = a_n + b_n = v_n.$$

La suite (v_n) est donc constante, égale à $v_0 = a_0 + b_0 = \boxed{8}$.

6) Pour tout n , $a_n + b_n = 8$. En passant à la limite : $\ell + \ell = 8$, d'où $\boxed{\ell = 4}$.

Les suites (a_n) et (b_n) convergent toutes les deux vers 4, ce qui confirme la conjecture de la question 1).

Remarque : on peut même donner les formes explicites. De $b_n - a_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $b_n + a_n = 8$, on tire $a_n = 4 - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $b_n = 4 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (vérification : $a_1 = 3$, $b_1 = 5$).

Exercice 2

7 points

1) À la calculatrice (valeurs arrondies à 10^{-4} , à l'unité au-delà de 1 000) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a = 2,9$	2,9	2,805	2,629	2,3268	1,8803	1,3874	1,0750	1,0028	1,0000	1,0000
$a = 3,1$	3,1	3,205	3,4310	3,9549	5,3657	10,5299	46,4093	1 032	531 485	$1,4 \times 10^{11}$

Conjectures : pour $a = 2,9$, la suite semble décroissante et converger vers 1 ; pour $a = 3,1$, elle semble croissante et tendre vers $+\infty$.

2) a. On a $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . Si (u_n) converge vers ℓ , alors (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ . La fonction f est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$; par conséquent $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$.

Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $\boxed{\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}}$.

b. On résout :

$$\begin{aligned}
 \ell &= \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2} \\
 \iff \frac{1}{2}\ell^2 - 2\ell + \frac{3}{2} &= 0 \\
 \iff \ell^2 - 4\ell + 3 &= 0 \quad (\text{on multiplie par 2}) \\
 \iff (\ell - 1)(\ell - 3) &= 0 \quad (\Delta = 16 - 12 = 4, \text{ racines } \frac{4 \pm 2}{2}) \\
 \iff \ell &= 1 \text{ ou } \ell = 3.
 \end{aligned}$$

Les seules limites possibles sont $\boxed{1 \text{ et } 3}$.

3) a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x - 1$. Pour $x \geq 1$, $f'(x) \geq 0$: $\boxed{f \text{ est croissante sur } [1; +\infty[}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

Initialisation. $u_0 = 2,9$ et $u_1 = f(2,9) = \frac{1}{2} \times 8,41 - 2,9 + 1,5 = 2,805$. On a bien $1 \leq u_1 \leq u_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Les trois nombres 1, u_{n+1} et u_n appartiennent à $[1; +\infty[$, où f est croissante :

$$\begin{aligned}
 1 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\
 \implies f(1) &\leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad (f \text{ croissante sur } [1; +\infty[) \\
 \iff 1 &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \quad (\text{car } f(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1)
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- c. D'après 3)b., la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers un réel ℓ . D'après 2), $\ell = 1$ ou $\ell = 3$. Or la suite est décroissante, donc $u_n \leq u_0 = 2,9$ pour tout n , et en passant à la limite $\ell \leq 2,9$. On ne peut donc pas avoir $\ell = 3$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

- 4) a. Raisonnons par l'absurde : supposons (u_n) majorée. Elle est croissante (admis) et majorée, donc elle converge vers un réel ℓ , et d'après 2), $\ell \in \{1; 3\}$.

Mais la suite est croissante, donc $u_n \geq u_0 = 3,1$ pour tout n , et en passant à la limite $\ell \geq 3,1$: ni 1 ni 3 ne conviennent. C'est absurde.

Donc la suite (u_n) n'est pas majorée.

- b. La suite (u_n) est croissante et non majorée, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- c. Tant que U ne dépasse pas 10^6 , on passe au rang suivant :

```

P ← 0
U ← 3,1
Tant que U ≤ 106
    P ← P + 1
    U ←  $\frac{1}{2}U^2 - U + \frac{3}{2}$ 
Fin Tant que
    
```

À la fin, P contient le rang p cherché et U la valeur u_p . Après k passages dans la boucle, $P = k$ et $U = u_k$: les deux variables avancent ensemble.

Comme (u_n) tend vers $+\infty$, la condition finit par être fausse : l'algorithme s'arrête.

Pour information, on obtient $u_8 \approx 531\,485 \leq 10^6$ et $u_9 \approx 1,41 \times 10^{11} > 10^6$, donc $p = 9$.

Exercice 3

6 points

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».

Initialisation. $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$ (car $0 < a < b$) : $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
 & u_n > 0 \text{ et } v_n > 0 \\
 \implies & u_n + v_n > 0 \text{ et } u_n^2 + v_n^2 > 0 \\
 \implies & \frac{u_n + v_n}{2} > 0 \text{ et } \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0 \quad (\text{racine d'un réel } > 0) \\
 \iff & u_{n+1} > 0 \text{ et } v_{n+1} > 0
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\frac{u_n^2 + v_n^2}{2} \geq 0$, on a $v_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 &= \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \frac{(u_n + v_n)^2}{4} \\ &= \frac{2u_n^2 + 2v_n^2 - u_n^2 - 2u_nv_n - v_n^2}{4} \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{4} = \frac{(u_n - v_n)^2}{4}, \end{aligned}$$

soit $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

3) Pour $n = 0$: $u_0 = a < b = v_0$.

Pour $n \geq 1$: d'après 2) appliquée au rang $n-1$, $v_n^2 - u_n^2 = \left(\frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2}\right)^2 \geq 0$ (un carré est positif), donc $u_n^2 \leq v_n^2$.

Comme $u_n > 0$ et $v_n > 0$ (question 1) et que la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit $u_n \leq v_n$.

Ainsi $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0 \quad (\text{d'après 3}).$$

La suite (u_n) est donc **croissante**.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - v_n^2 = \frac{u_n^2 - v_n^2}{2}.$$

Or $0 < u_n \leq v_n$, donc $u_n^2 \leq v_n^2$ (la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$). Ainsi $v_{n+1}^2 \leq v_n^2$.

Comme $v_{n+1} > 0$ et $v_n > 0$, la croissance de la racine carrée donne $v_{n+1} \leq v_n$: la suite (v_n) est **décroissante**.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n \leq v_0 = b$. La suite (u_n) est croissante et majorée par b , donc (u_n) **converge** vers un réel ℓ .

De même $v_n \geq u_n \geq u_0 = a$: la suite (v_n) est décroissante et minorée par a , donc (v_n) **converge** vers un réel ℓ' .

7) On passe à la limite dans la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$: (u_{n+1}) tend vers ℓ et $\frac{u_n + v_n}{2}$ tend vers $\frac{\ell + \ell'}{2}$, donc

$$\ell = \frac{\ell + \ell'}{2} \iff 2\ell = \ell + \ell' \iff \ell = \ell'.$$

Les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite ℓ .

On peut aussi la situer : pour tout $n \geq 1$, $u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$, donc en passant à la limite

$$\frac{a+b}{2} \leq \ell \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Remarque importante : on ne peut pas aller plus loin. Il n'existe pas d'expression simple de ℓ en fonction de a et b (le passage à la limite dans la relation de v_{n+1} redonne seulement $\ell = \ell$). Ce que l'on peut « calculer », c'est donc le fait que les deux limites sont égales, et un encadrement de cette limite commune.

Exemple numérique : pour $a = 1$ et $b = 2$, $u_1 = 1,5$, $v_1 \approx 1,5811$, $u_2 \approx 1,5406$, $v_2 \approx 1,5411$, et la limite commune vaut $\ell \approx 1,5408$.