

Calculatrice autorisée

Une attention toute particulière sera accordée à la qualité de la rédaction, toute affirmation devra être argumentée.

Exercice 1

7 points

On définit deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 7 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) À l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation et la convergence de ces suites ? Expliquer les raisons de cette conjecture.
- 2) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_n = b_n - a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n .
 - c. Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
- 3)
 - a. Pour $n \in \mathbb{N}$, comparer a_n et b_n .
 - b. Étudier le sens de variation des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$.
- 4) Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites convergentes et qu'elles ont la même limite.
- 5) Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $v_n = b_n + a_n$. Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite constante.
- 6) Déterminer la limite des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2

7 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de $u_0 = a$.

- 1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.
- 2) Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
 - a. Montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
 - b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.
- 3) Dans cette question, on prend $a = 2,9$.
 - a. Montrer que f est croissante sur $[1; +\infty[$.
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 - c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- 4) Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
 - a. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
 - b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
 - c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$. Recopier et compléter cet algorithme.
 P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```

P ← 0
U ← .....
Tant que .....
    P ← .....
    U ← .....
Fin Tant que
  
```

Exercice 3

6 points

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
- 2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2} \right)^2.$$

- 3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
- 4) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- 5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 . En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
- 6) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
- 7) Calculer les limites de (u_n) et (v_n) .