

Exercice 1

4 points

- 1) a. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 , alors

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}}.$$

- b. On donne ici la démonstration classique à partir des formules des racines (une variante par la forme factorisée suit).

Comme f a deux racines distinctes, son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif et

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Somme :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Produit : on reconnaît l'identité remarquable $(u - v)(u + v) = u^2 - v^2$ avec $u = -b$ et $v = \sqrt{\Delta}$:

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Variante par la factorisation. Pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. En développant :

$$f(x) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Deux polynômes égaux pour tout x ont les mêmes coefficients, donc $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$, d'où, puisque $a \neq 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

- 2) $f(2) = -2 \times 4 + 7 \times 2 - 6 = -8 + 14 - 6 = 0$, donc $\boxed{x_1 = 2}$ est une racine évidente de f .

Avec le produit des racines : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{-2} = 3$, donc $2x_2 = 3$ et $\boxed{x_2 = \frac{3}{2}}$.

Vérification avec la somme : $2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{7}{-2} = \frac{7}{2}$.

Exercice 2

3 points

Une fonction est du second degré si elle peut s'écrire, pour tout réel x , $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- a. $f(x) = -x^2 + \sqrt{7}x$: de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1 \neq 0$, $b = \sqrt{7}$, $c = 0$.
 f est du second degré.

- b. On développe :

$$g(x) = 12x - 6x^2 + 20 - 10x - 7x + 6x^2 = -5x + 20.$$

Les termes en x^2 s'annulent : g est affine, elle n'est pas du second degré.

c. Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc h est définie sur $\mathbb{R}$, et

$$h(x) = \frac{x^2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x^2.$$

h s'écrit $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = c = 0$: h est du second degré.

Exercice 3

0,5 point

1 est racine ($-3 + 8 - 5 = 0$). Le coefficient de x^2 impose $-3x$ dans la seconde parenthèse et le terme constant impose $(-1) \times 5 = -5$:

$$-3x^2 + 8x - 5 = (x - 1)(-3x + 5).$$

Vérification : $(x - 1)(-3x + 5) = -3x^2 + 5x + 3x - 5 = -3x^2 + 8x - 5$.

Exercice 4

1,5 point

Factorisation de $A(x)$. On reconnaît $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ avec $u = 4x$ et $v = 3x + 1$:

$$A(x) = (4x - (3x + 1))(4x + (3x + 1)) = (x - 1)(7x + 1).$$

Vérification : $(x - 1)(7x + 1) = 7x^2 - 6x - 1$ et $16x^2 - (9x^2 + 6x + 1) = 7x^2 - 6x - 1$.

Factorisation de $B(x)$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 9 - 56 = -47 < 0$.

B n'a pas de racine réelle : $B(x)$ ne se factorise pas (en produit de facteurs du premier degré).

Exercice 5

0,5 point

$x^2 - 12x$ est le début du développement de $(x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$, donc

$$f(x) = (x - 6)^2 - 36 + 7 = (x - 6)^2 - 29.$$

Vérification par les formules : $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2} = 6$ et $\beta = f(6) = 36 - 72 + 7 = -29$.

Exercice 6

2 points

f admet les racines 1 et -7 , donc il existe un réel $a \neq 0$ tel que, pour tout réel x ,

$$f(x) = a(x - 1)(x + 7).$$

Or $f(2) = 5 : a(2-1)(2+7) = 5 \iff 9a = 5 \iff a = \frac{5}{9}$. Donc

$$f(x) = \frac{5}{9}(x-1)(x+7).$$

Vérification : $f(2) = \frac{5}{9} \times 1 \times 9 = 5$.

Exercice 7

8,5 points

- a. $x^2 - \sqrt{5}x + 5 = 0 : a = 1, b = -\sqrt{5}, c = 5$.
 $\Delta = (-\sqrt{5})^2 - 4 \times 1 \times 5 = 5 - 20 = -15 < 0$: l'équation n'a pas de solution réelle.

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

- b. On regroupe tout dans un membre :

$$2x^2 - 3 = 3x^2 - 7x - 3 \iff -x^2 + 7x = 0 \iff x(7-x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 7.$$

$$\mathcal{S} = \{0; 7\}$$

- c. $2x^2 - 10x + 11 = 0 : \Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 11 = 100 - 88 = 12 > 0$ et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$$x_1 = \frac{10 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5 - \sqrt{3}}{2}; \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \right\}$$

- d. $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 18 = 0 : \Delta = (-6)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 18 = 36 - 36 = 0$: une seule solution,

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2 \times \frac{1}{2}} = 6.$$

(Autre méthode : en multipliant par 2, $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2 = 0$.)

$$\mathcal{S} = \{6\}$$

- e. Valeurs interdites : $x(2x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$. On résout donc sur $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$.

Pour $x \neq 0$ et $x \neq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{5x-3}{x(2x-1)} = 2 &\iff 5x-3 = 2x(2x-1) \\ &\iff 5x-3 = 4x^2-2x \\ &\iff 4x^2-7x+3 = 0. \end{aligned}$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 49 - 48 = 1 > 0, \text{ d'où}$$

$$x_1 = \frac{7-1}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+1}{8} = 1.$$

Aucune de ces deux valeurs n'est interdite.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{4}; 1 \right\}$$

$$\text{Vérification pour } x = \frac{3}{4} : 5 \times \frac{3}{4} - 3 = \frac{3}{4} \text{ et } \frac{3}{4} \left(2 \times \frac{3}{4} - 1 \right) = \frac{3}{8}, \text{ or } \frac{3}{4} \div \frac{3}{8} = 2.$$