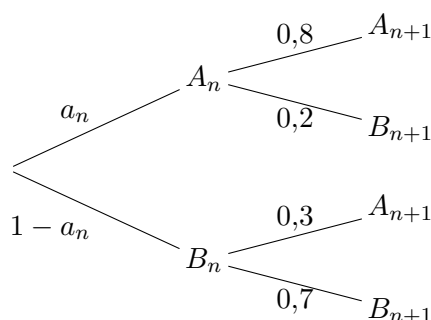


Exercice 1

12 points

- 1) Si la n -ième partie est de type A, la suivante est de type A avec la probabilité 0,8, donc de type B avec la probabilité $1 - 0,8 = 0,2$.
 Si la n -ième partie est de type B, la suivante est de type B avec la probabilité 0,7, donc de type A avec la probabilité $1 - 0,7 = 0,3$.
 Enfin $p(B_n) = 1 - p(A_n) = 1 - a_n$.



- 2) Les événements A_n et B_n forment une partition de l'univers (chaque partie est soit de type A, soit de type B). D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= p(A_{n+1}) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(A_{n+1}) \\
 &= a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3 \\
 &= 0,8 a_n + 0,3 - 0,3 a_n \\
 &= 0,5 a_n + 0,3.
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,3$.

- 3) Étude d'un cas particulier ($a = 0,5$)

- a. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la propriété : « $0 \leq a_n \leq 0,6$ ».

Initialisation. $a_1 = a = 0,5$ et $0 \leq 0,5 \leq 0,6$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
 &0 \leq a_n \leq 0,6 \\
 \Leftrightarrow &0 \leq 0,5 a_n \leq 0,3 && \text{(on multiplie par } 0,5 > 0) \\
 \Leftrightarrow &0,3 \leq 0,5 a_n + 0,3 \leq 0,6 && \text{(on ajoute } 0,3) \\
 \Leftrightarrow &0,3 \leq a_{n+1} \leq 0,6 \\
 \Rightarrow &0 \leq a_{n+1} \leq 0,6 && \text{(car } 0 \leq 0,3)
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire : pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq a_n \leq 0,6$.

- b. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_{n+1} - a_n = 0,5 a_n + 0,3 - a_n = 0,3 - 0,5 a_n = 0,5 (0,6 - a_n).$$

D'après la question précédente, $a_n \leq 0,6$, donc $0,6 - a_n \geq 0$ et $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

La suite (a_n) est donc croissante.

Vérification : $a_1 = 0,5, a_2 = 0,55, a_3 = 0,575, a_4 = 0,5875$: les termes augmentent en restant inférieurs à 0,6.

4) Étude du cas général ($a \in [0; 1]$)

a. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5 a_n + 0,3 - 0,6 = 0,5 a_n - 0,3 = 0,5 (a_n - 0,6) = 0,5 u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6$, soit $u_1 = a - 0,6$.

b. Pour tout entier $n \geq 1, u_n = u_1 \times q^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$.

Comme $u_n = a_n - 0,6$, on a $a_n = u_n + 0,6$, d'où :

$$\boxed{a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6}.$$

Vérification : pour $n = 1$, on retrouve $a_1 = (a - 0,6) \times 1 + 0,6 = a$.

Exercice 2

8 points

1) On ajoute les termes un à un :

$$u_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \boxed{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}},$$

$$u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

2) La somme u_{n+1} contient tous les termes de u_n et un terme de plus, celui d'indice $k = n + 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Pour tout $n \geq 1, n+1 > 0$ et $n+2 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.

3) En remplaçant chaque terme de la somme grâce à l'égalité donnée :

$$u_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Chaque terme $-\frac{1}{k+1}$ s'annule avec le terme $+\frac{1}{k+1}$ de la parenthèse suivante : il ne reste que

le premier terme $\frac{1}{1}$ et le dernier $-\frac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Vérification : $u_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $u_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $u_3 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, en accord avec la question 1).

Remarque : on peut aussi démontrer cette formule par récurrence, l'hérédité reposant sur

$$1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{(n+2) - 1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

4) Pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} n &\geq 1 \\ \Leftrightarrow n+1 &\geq 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} &\leq \frac{1}{2} && \text{(la fonction inverse est décroissante sur }]0; +\infty[) \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} &\geq 1 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow u_n &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc minorée par $\frac{1}{2}$.

Autre méthode : la suite (u_n) est croissante (question 2), donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq u_1 = \frac{1}{2}$.