

Calculatrice interdite

## Exercice 1

12 points

Une plateforme propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un de type B.

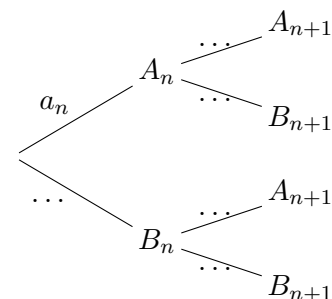
On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $A_n$  et  $B_n$  les évènements :

- $A_n$  : « la  $n$ -ième partie est une partie de type A » ;
- $B_n$  : « la  $n$ -ième partie est une partie de type B ».

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on note  $a_n$  la probabilité de l'évènement  $A_n$ .



- 1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
- 2) Démontrer, en utilisant la formule des probabilités totales (vue en classe de Première et rappelée en fin de devoir), que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,3$ .

Dans la suite de l'exercice, on note  $a$  la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où  $a$  est un nombre réel compris dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

La suite  $(a_n)$  est donc définie par  $a_1 = a$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,3$ .

### 3) Étude d'un cas particulier

Dans cette question, on suppose que  $a = 0,5$ .

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a  $0 \leq a_n \leq 0,6$ .
- b. En déduire que la suite  $(a_n)$  est croissante.

### 4) Étude du cas général

Dans cette question, le réel  $a$  appartient à l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par  $u_n = a_n - 0,6$ .

- a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique. On précisera la raison  $q$  et le premier terme  $u_1$ .
- b. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$ .

Rappel : Formule des probabilités totales

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  une partition de l'univers  $\Omega$  et  $B$  un évènement quelconque de  $\Omega$ .

Alors :  $p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

## Exercice 2

8 points

On pose, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

- 1) Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite croissante. On calculera la différence  $u_{n+1} - u_n$ .
- 3) À l'aide des égalités  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  pour tout  $k \geq 1$ , démontrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
- 4) En déduire alors que la suite  $(u_n)$  est minorée par  $\frac{1}{2}$ .