

Exercice 1

5 points

- 1) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en $B(1; 0)$. Cette droite passe par $B(1; 0)$ et $D(2; -2)$, donc

$$f'(1) = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{-2 - 0}{2 - 1} = -2.$$

Réponse **e.**

- 2) Sur $[-2; 1]$, la courbe $(\mathcal{C})$ est située en dessous de chacune de ses tangentes (le coefficient directeur des tangentes diminue quand x augmente); sur $[1; 4]$, elle est au-dessus de ses tangentes. La tangente (T) traverse la courbe en B : B est un point d'inflexion.

Ainsi f est concave sur $[-2; 1]$ et convexe sur $[1; 4]$. Elle n'est ni convexe ni concave sur $[-2; 4]$, ni sur $[0; 2]$ (qui contient le point d'inflexion d'abscisse 1 en son intérieur), et elle n'est pas convexe sur $[-2; 1]$.

Réponse **d.** : f est concave sur $[-2; 1]$.

- 3) $g = u \times v$ avec $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^{5-3x}$, $v'(x) = -3e^{5-3x}$ (dérivée de e^{ax+b} : $a e^{ax+b}$).
Donc

$$g'(x) = 2e^{5-3x} + 2x \times (-3e^{5-3x}) = (2 - 6x) e^{5-3x}.$$

Réponse **f.**

- 4) $h = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$. Comme $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$,

$$h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Réponse **d.**

- 5) $j = u^3$ avec $u(x) = 5x^2 + 1$ et $u'(x) = 10x$. Comme $(u^3)' = 3u'u^2$,

$$j'(x) = 3 \times 10x \times (5x^2 + 1)^2 = 30x (5x^2 + 1)^2.$$

Réponse **e.**

Exercice 2

4 points

- 1) f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 8.$$

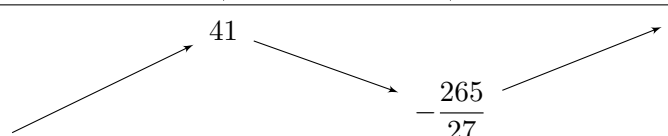
Discriminant : $\Delta = 10^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 100 + 96 = 196 = 14^2 > 0$. Deux racines :

$$x_1 = \frac{-10 - 14}{6} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10 + 14}{6} = \frac{2}{3},$$

d'où $f'(x) = 3(x+4) \left(x - \frac{2}{3}\right) = (x+4)(3x-2)$, du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines.

Valeurs : $f(-4) = -64 + 80 + 32 - 7 = 41$ et

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} + \frac{20}{9} - \frac{16}{3} - 7 = \frac{8 + 60 - 144 - 189}{27} = -\frac{265}{27}.$$

x	$-\infty$	-4	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

f est croissante sur $] -\infty ; -4]$ et sur $[\frac{2}{3} ; +\infty[$ et décroissante sur $[-4 ; \frac{2}{3}]$.

2) La tangente T_2 a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, avec

$$f(2) = 8 + 20 - 16 - 7 = 5 \quad \text{et} \quad f'(2) = 12 + 20 - 8 = 24.$$

Donc $y = 24(x - 2) + 5$, soit $T_2 : y = 24x - 43$.

3) Pour tout réel x : $f''(x) = 6x + 10$.

f'' est une fonction affine de coefficient directeur $6 > 0$: elle s'annule en $x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ en changeant de signe (négative avant, positive après). Donc f est concave sur $] -\infty ; -\frac{5}{3}]$, convexe sur $[-\frac{5}{3} ; +\infty[$, et $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $-\frac{5}{3}$:

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{125}{27} + \frac{125}{9} + \frac{40}{3} - 7 = \frac{-125 + 375 + 360 - 189}{27} = \frac{421}{27}.$$

Point d'inflexion : $I\left(-\frac{5}{3} ; \frac{421}{27}\right)$.

Exercice 3

11 points

Partie A

1) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 5$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x + 6$, $v'(x) = 1$, et $v(x) \neq 0$ sur $] -6 ; +\infty[$. Pour tout $x > -6$:

$$f'(x) = \frac{2(x+6) - (2x+5) \times 1}{(x+6)^2} = \frac{2x+12-2x-5}{(x+6)^2}, \quad f'(x) = \frac{7}{(x+6)^2}.$$

2) Pour tout $x > -6$, $7 > 0$ et $(x+6)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

f est strictement croissante sur $] -6 ; +\infty[$.

3) Pour $x > -6$ (donc $x + 6 \neq 0$) :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x + 5 = x(x + 6) \\ &\iff x^2 + 4x - 5 = 0 \\ &\iff (x - 1)(x + 5) = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -5. \end{aligned}$$

($\Delta = 16 + 20 = 36$, racines $\frac{-4 \pm 6}{2}$.) Les deux valeurs sont dans $] -6 ; +\infty[$: $S = \{-5 ; 1\}$.

Partie B

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $1 \leq u_{n+1} < u_n \leq 8$ ».

Initialisation. $u_0 = 8$ et $u_1 = f(8) = \frac{16+5}{8+6} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$. On a bien $1 \leq \frac{3}{2} < 8 \leq 8$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Les nombres $1, u_{n+1}, u_n$ et 8 appartiennent à $] -6 ; +\infty[$, intervalle sur lequel f est strictement croissante (partie A) : appliquer f conserve l'ordre. Alors :

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_{n+1} < u_n \leq 8 \\ \iff f(1) &\leq f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(8) \quad (f \text{ strictement croissante sur }] -6 ; +\infty[) \\ \iff 1 &\leq u_{n+2} < u_{n+1} \leq \frac{3}{2} \quad (\text{car } f(1) = \frac{7}{7} = 1 \text{ et } f(8) = \frac{3}{2}) \\ \implies 1 &\leq u_{n+2} < u_{n+1} \leq 8 \quad (\text{car } \frac{3}{2} \leq 8) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$1 \leq u_{n+1} < u_n \leq 8 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2) Pour tout $n, u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

Pour tout $n, u_n \geq 1$ (car $u_n > u_{n+1} \geq 1$) : la suite est **minorée par 1**.

Décroissante et minorée, la suite (u_n) est donc **convergente**, vers une limite $\ell \geq 1$.

Pour aller plus loin : f étant continue en ℓ , la limite vérifie $f(\ell) = \ell$; d'après la partie A, $\ell = 1$ ou $\ell = -5$, et comme $\ell \geq 1$, $\ell = 1$.

Partie C

1) D'après la partie B, $u_n > u_{n+1} \geq 1$, donc $u_n > 1$: $u_n - 1 \neq 0$ et w_n est bien défini. De plus $w_n \neq 1$ (sinon $u_n + 5 = u_n - 1$, soit $5 = -1$, impossible). Alors :

$$\begin{aligned} w_n = \frac{u_n + 5}{u_n - 1} &\iff w_n(u_n - 1) = u_n + 5 \\ &\iff w_n u_n - u_n = w_n + 5 \\ &\iff u_n(w_n - 1) = w_n + 5 \\ &\iff u_n = \frac{w_n + 5}{w_n - 1} \quad (\text{car } w_n - 1 \neq 0) \end{aligned}$$

Donc $u_n = \frac{w_n + 5}{w_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule séparément numérateur et dénominateur de w_{n+1} :

$$u_{n+1} + 5 = \frac{2u_n + 5 + 5(u_n + 6)}{u_n + 6} = \frac{7u_n + 35}{u_n + 6} = \frac{7(u_n + 5)}{u_n + 6},$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n + 5 - (u_n + 6)}{u_n + 6} = \frac{u_n - 1}{u_n + 6}.$$

D'où

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 5}{u_{n+1} - 1} = \frac{7(u_n + 5)}{u_n + 6} \times \frac{u_n + 6}{u_n - 1} = 7 \times \frac{u_n + 5}{u_n - 1} = 7w_n.$$

La suite (w_n) est géométrique de raison 7, de premier terme $w_0 = \frac{8+5}{8-1} = \frac{13}{7}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times 7^n = \frac{13}{7} \times 7^n = 13 \times 7^{n-1}$. D'après la question 1 :

$$\boxed{u_n = \frac{13 \times 7^{n-1} + 5}{13 \times 7^{n-1} - 1}} \quad \left(\text{ou encore } u_n = \frac{13 \times 7^n + 35}{13 \times 7^n - 7} \right).$$

Vérification : pour $n = 0$, $u_0 = \frac{13 + 35}{13 - 7} = \frac{48}{6} = 8$; pour $n = 1$, $u_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$.

Partie D

1) Tant que $u_n \geq 1,005$, on calcule le terme suivant et on augmente l'indice de 1 :

```

1 u = 8
2 n = 0
3 while u >= 1.005:
4     u = (2*u + 5) / (u + 6)
5     n = n + 1
6 print(n)
```

2) Valeurs successives (calculées exactement, puis arrondies) :

n	0	1	2	3	4
u_n	8	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{16}{15} \approx 1,0667$	$\frac{107}{106} \approx 1,0094$	$\frac{744}{743} \approx 1,0013$
$u_n < 1,005$?	non	non	non	non	oui

La boucle s'arrête au premier indice tel que $u_n < 1,005$: l'algorithme affiche 4.

Vérification avec la partie C : $u_n - 1 = \frac{6}{w_n - 1}$, donc $u_n < 1,005 \iff w_n - 1 > 1200 \iff 13 \times 7^{n-1} > 1201$. Or $13 \times 7^2 = 637$ et $13 \times 7^3 = 4459$: le premier indice est bien $n = 4$.