

Exercice 1

4 points

- 1) On écrit $f(x) = (x^2 + 3x - 4)^{-3}$, de la forme u^{-3} avec $u(x) = x^2 + 3x - 4$ et $u'(x) = 2x + 3$.
Comme $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ pour tout entier relatif n :

$$f'(x) = -3(2x + 3)(x^2 + 3x - 4)^{-4}, \quad \text{soit} \quad \boxed{f'(x) = \frac{-3(2x + 3)}{(x^2 + 3x - 4)^4}}.$$

On peut aussi utiliser $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v = u^3$ et $v' = 3u'u^2$:

$$f'(x) = -\frac{3(2x + 3)(x^2 + 3x - 4)^2}{(x^2 + 3x - 4)^6},$$

le même résultat après simplification.

- 2) $f = u \times w$ avec $u(x) = e^{-2x^3+1}$ et $w(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

- $(e^h)' = h' e^h$ avec $h(x) = -2x^3 + 1$: $u'(x) = -6x^2 e^{-2x^3+1}$;
- $(\sqrt{k})' = \frac{k'}{2\sqrt{k}}$ avec $k(x) = x^2 + x + 1$: $w'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Avec $(uw)' = u'w + uw'$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 e^{-2x^3+1} \sqrt{x^2 + x + 1} + e^{-2x^3+1} \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= e^{-2x^3+1} \times \frac{-12x^2(x^2 + x + 1) + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}, \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f'(x) = \frac{(-12x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 2x + 1)e^{-2x^3+1}}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}}.$$

Exercice 2

5,5 points

$u(x) = \sqrt{x + 4} - 3$ est définie pour $x + 4 \geq 0$, soit sur $[-4; +\infty[$, et dérivable sur $] -4; +\infty[$ (la racine carrée n'est dérivable qu'en un nombre strictement positif); $v(x) = x^4$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 1) a. $g(x) = u(v(x))$ existe si x appartient à l'ensemble de définition de v ($\mathbb{R}$) et si $v(x) \in [-4; +\infty[$.
Or, pour tout réel x , $v(x) = x^4 \geq 0 \geq -4$. Donc $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{g(x) = \sqrt{x^4 + 4} - 3}.$$

- b. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $v(x) = x^4 \geq 0 > -4$, donc $v(x) \in] -4; +\infty[$, où u est dérivable.

Par composition, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(D'ailleurs $x^4 + 4 \geq 4 > 0$ pour tout x , et $g'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+4}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+4}}$.)

- 2) a. $f(x) = v(u(x))$ existe si $u(x)$ existe, c'est-à-dire $x \geq -4$; v étant définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas d'autre condition.

$$\mathcal{D}_f = [-4; +\infty[\quad \text{et} \quad f(x) = (\sqrt{x+4} - 3)^4.$$

- b. u est dérivable sur $] -4; +\infty[$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition f est dérivable sur $] -4; +\infty[$.

Pour tout $x > -4$, avec $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$ et $v'(X) = 4X^3$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \times 4(\sqrt{x+4} - 3)^3, \quad \text{soit} \quad f'(x) = \frac{2(\sqrt{x+4} - 3)^3}{\sqrt{x+4}}.$$

Remarque : f n'est pas dérivable en -4 : quand $x \rightarrow -4^+$, $(\sqrt{x+4} - 3)^3 \rightarrow -27$ et $\sqrt{x+4} \rightarrow 0^+$, donc $f'(x) \rightarrow -\infty$ (tangente verticale).

- c. Pour $x > -4$, $\sqrt{x+4} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $(\sqrt{x+4} - 3)^3$, c'est-à-dire celui de $\sqrt{x+4} - 3$ (un cube a le signe du nombre).

$$\sqrt{x+4} - 3 > 0 \iff \sqrt{x+4} > 3 \iff x+4 > 9 \iff x > 5,$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Donc $f'(x) < 0$ sur $] -4; 5[$, $f'(5) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]5; +\infty[$.

Valeurs : $f(-4) = (0 - 3)^4 = 81$; $f(5) = (\sqrt{9} - 3)^4 = 0$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{x+4} - 3 \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

x	-4	5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	
f	81	0	$+\infty$

f est décroissante sur $[-4; 5]$ et croissante sur $[5; +\infty[$, de minimum 0 atteint en 5.

Exercice 3

4 points

On lit sur la courbe de f' : f' s'annule en -3 , -2 et 1 ; $f'(x) > 0$ sur $] -3; -2[$ et sur $]1; +\infty[$ (partie tracée), $f'(x) < 0$ avant -3 et sur $] -2; 1[$.

De plus f' est croissante jusqu'à son maximum (atteint vers $x \approx -2,5$), décroissante ensuite jusqu'à son minimum (vers $x \approx 0$, valeur environ -3), puis croissante.

- 1) Sur $[0; 1]$, la courbe de f' est sous l'axe des abscisses : $f'(x) < 0$ sur $[0; 1[$ et $f'(1) = 0$.
Donc f est (strictement) décroissante sur $[0; 1]$: l'affirmation est **fausse**.
- 2) f' s'annule en -2 en changeant de signe : $f'(x) > 0$ juste avant -2 (sur $] - 3; -2[$) et $f'(x) < 0$ juste après (sur $] - 2; 1[$).
Donc f est croissante sur $[-3; -2]$ puis décroissante sur $[-2; 1]$: f admet un maximum local en -2 . L'affirmation est **vraie**.
- 3) f est convexe sur un intervalle si et seulement si f' y est croissante.
Or sur $[-1; 0]$, la courbe de f' descend (de $f'(-1) \approx -2$ à $f'(0) \approx -3$) : f' n'est pas croissante sur $[-1; 1]$, donc f n'est pas convexe sur $[-1; 1]$ (elle est concave sur la partie où f' décroît). L'affirmation est **fausse**.
- 4) Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité de f , c'est-à-dire à un changement de sens de variation de f' .
Sur l'intervalle représenté, f' est croissante, puis décroissante (après son maximum vers $-2,5$), puis croissante (après son minimum vers 0) : elle change deux fois de sens de variation.
 f est donc convexe, puis concave, puis convexe : le graphe de f admet exactement deux points d'inflexion, d'abscisses les abscisses des extremums locaux de f' . L'affirmation est **vraie**.

Exercice 4

3,5 points

- 1) $f = \frac{a}{w}$ avec $w(x) = 1 + e^{-bx}$, $w'(x) = -be^{-bx}$, et $\left(\frac{a}{w}\right)' = -\frac{aw'}{w^2}$:

$$f'(x) = \frac{ab e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$$

- 2) a. La courbe passe par $A(0; 0,5)$, donc $f(0) = 0,5$.

b. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente en A , c'est-à-dire de la droite (AB) :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \frac{0,5}{10}, \quad \text{soit} \quad f'(0) = 0,05.$$

- 3) D'après l'expression de f : $f(0) = \frac{a}{1 + e^0} = \frac{a}{2}$; d'après la question 1 : $f'(0) = \frac{ab e^0}{(1 + e^0)^2} = \frac{ab}{4}$.

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 0,5 \\ \frac{ab}{4} = 0,05 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ ab = 0,2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0,2 \end{cases}$$

Donc $a = 1$ et $b = 0,2$, c'est-à-dire $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$.

Vérification : $f(0) = \frac{1}{2} = 0,5$ et $f'(0) = \frac{1 \times 0,2}{4} = 0,05$.

Exercice 5

3 points

f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit d'un polynôme et de $x \mapsto e^{nx-1}$).

Dérivée première. Avec $(uw)' = u'w + uw'$, $u(x) = 10x^2$, $w(x) = e^{nx-1}$, $w'(x) = n e^{nx-1}$:

$$f'_n(x) = 20x e^{nx-1} + 10nx^2 e^{nx-1} = 10 (nx^2 + 2x) e^{nx-1}.$$

Dérivée seconde. De même avec $u(x) = 10 (nx^2 + 2x)$, $u'(x) = 10(2nx + 2)$:

$$\begin{aligned} f''_n(x) &= 10(2nx + 2) e^{nx-1} + 10n (nx^2 + 2x) e^{nx-1} \\ &= 10 (n^2x^2 + 4nx + 2) e^{nx-1}. \end{aligned}$$

Signe de f''_n . Pour tout réel x , $10 e^{nx-1} > 0$, donc $f''_n(x)$ a le signe du trinôme $n^2x^2 + 4nx + 2$ (de coefficient dominant $n^2 > 0$ car $n \neq 0$).

$$\Delta = (4n)^2 - 4 \times n^2 \times 2 = 16n^2 - 8n^2 = 8n^2 > 0.$$

Le trinôme a deux racines distinctes ($\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}n$ car $n > 0$) :

$$x_1 = \frac{-4n - 2\sqrt{2}n}{2n^2} = \frac{-2 - \sqrt{2}}{n} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4n + 2\sqrt{2}n}{2n^2} = \frac{-2 + \sqrt{2}}{n}.$$

Il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles :

x	$-\infty$	$\frac{-2 - \sqrt{2}}{n}$	$\frac{-2 + \sqrt{2}}{n}$	$+\infty$
$f''_n(x)$	+	0	0	+
f_n	convexe	concave	convexe	

f''_n s'annule en changeant de signe en x_1 et en x_2 (et seulement là) : la convexité de f_n change en ces deux points.

Donc $\mathcal{C}_n$ admet deux points d'inflexion, d'abscisses $\frac{-2 - \sqrt{2}}{n}$ et $\frac{-2 + \sqrt{2}}{n}$.