

Automatismes

6 points

Tableau des réponses

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	b	a	c	a	a	b	a	b	c	d	d	b

Justifications

Question 1. On écrit les trois nombres sous forme décimale : $A = 0,23$, $B = 0,2$ et $C = \frac{1}{4} = 0,25$.
Comme $0,2 < 0,23 < 0,25$, on obtient $B < A < C$: **réponse b**.

Question 2. $4 + \frac{4}{9} = \frac{36}{9} + \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$. Donc $\frac{1}{z} = \frac{40}{9}$, et en prenant l'inverse : $z = \frac{9}{40}$: **réponse a**.

Question 3. $B = \frac{E+A}{C} \iff C \times B = E + A \iff A = C \times B - E$ (on multiplie par $C \neq 0$, puis on retranche E) : **réponse c**.

Question 4. Augmenter de 210 %, c'est multiplier par $1 + \frac{210}{100} = 1 + 2,1 = 3,1$: **réponse a**.

Question 5. Le coefficient multiplicateur global est $1,25 \times 0,75 = 0,9375 < 1$.
Quelle que soit la valeur de départ, le prix final vaut 93,75 % du prix initial : il est strictement inférieur à sa valeur de départ : **réponse a**.

Question 6. Les coordonnées $(x; y)$ du point d'intersection vérifient les deux équations :

$$-2x - 3 = 4x - 2 \iff -6x = 1 \iff x = -\frac{1}{6}, \quad y = 4 \times \left(-\frac{1}{6}\right) - 2 = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}.$$

Vérification dans l'équation de (D) : $-2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) - 3 = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$. Le produit des coordonnées vaut :

$$\left(-\frac{1}{6}\right) \times \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} : \text{réponse b.}$$

Question 7. La droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; 4)$: l'ordonnée à l'origine est $p = 4$.
Elle passe aussi par $(-4; 0)$; le coefficient directeur est $m = \frac{4-0}{0-(-4)} = 1$.
D'où $y = x + 4$: **réponse a**.

Question 8. On cherche les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est *strictement au-dessus* de $\mathcal{C}_g$.
Les courbes se coupent aux points d'abscisses 0, 2 et 3. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ de l'abscisse -1 (incluse, car $f(-1) = 2 > g(-1) = -2$) jusqu'à l'abscisse 0 (exclue), puis entre 2 et 3 (exclus, car il y a égalité).
 $S = [-1; 0[\cup]2; 3[$: **réponse b**.

Question 9. Les autres dépenses représentent $100\% - 25\% = 75\%$ du budget B :

$$0,75 B = 3\,000 \iff B = \frac{3\,000}{0,75} = \frac{3\,000 \times 4}{3} = 4\,000.$$

Le budget total est de 4 000 € : **réponse c.**

Question 10. Avec la valeur x ajoutée, la série compte 5 valeurs; sa moyenne doit valoir 8 :

$$\frac{6 + 5 + 13 + 6 + x}{5} = 8 \iff \frac{30 + x}{5} = 8 \iff 30 + x = 40 \iff x = 10.$$

Il faut ajouter 10 : **réponse d.**

Question 11. (D) est strictement au-dessus de (D') lorsque :

$$-9x + 5 > 5x + 3 \iff -14x > -2 \iff x < \frac{2}{14} \iff x < \frac{1}{7}$$

(on divise par $-14 < 0$: le sens de l'inégalité change). Soit $x \in \left] -\infty ; \frac{1}{7} \right[$: **réponse d.**

Question 12. $-14 - 7x^2 = 0 \iff -7x^2 = 14 \iff x^2 = -2$.

Un carré est toujours positif ou nul : cette équation n'a pas de solution réelle, $S = \emptyset$: **réponse b.**

Exercice 1

5 points

1) On calcule les premiers termes :

$$u_1 = 0,5 \times 10 + 3 = 8, \quad u_2 = 0,5 \times 8 + 3 = 7.$$

- $u_1 - u_0 = 8 - 10 = -2$ et $u_2 - u_1 = 7 - 8 = -1$. Ces différences ne sont pas égales : (u_n) **n'est pas arithmétique.**
- $\frac{u_1}{u_0} = \frac{8}{10} = 0,8$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{8} = 0,875$. Ces quotients ne sont pas égaux : (u_n) **n'est pas géométrique.**

2) a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5 u_n + 3 - 6 = 0,5 u_n - 3 = 0,5 (u_n - 6) = 0,5 v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$, de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 10 - 6 = 4$.

b. D'après le cours, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q^n$, soit

$$\boxed{v_n = 4 \times 0,5^n}.$$

c. Pour tout n , $v_n = u_n - 6$, donc $u_n = v_n + 6$, c'est-à-dire

$$u_n = 6 + 4 \times 0,5^n.$$

Vérification : $u_0 = 6 + 4 = 10$, $u_1 = 6 + 2 = 8$, $u_2 = 6 + 1 = 7$. On retrouve les termes calculés à la question 1.

3) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = (6 + 4 \times 0,5^{n+1}) - (6 + 4 \times 0,5^n) = 4 \times 0,5^n \times (0,5 - 1) = -2 \times 0,5^n.$$

Or $0,5^n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n : la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

4) Les valeurs affichées se rapprochent de 6 ($u_8 \approx 6,0156$, $u_{12} \approx 6,001$, $u_{16} \approx 6,0001$), et la calculatrice affiche même 6 à partir de $n = 17$ (valeur arrondie : en réalité $u_n = 6 + 4 \times 0,5^n > 6$). On conjecture que :

les termes u_n se rapprochent de 6 lorsque n tend vers $+\infty$

(la suite semble converger vers 6). C'est cohérent avec la forme explicite : $4 \times 0,5^n$ devient aussi proche de 0 que l'on veut, car $0 < 0,5 < 1$.

Exercice 2

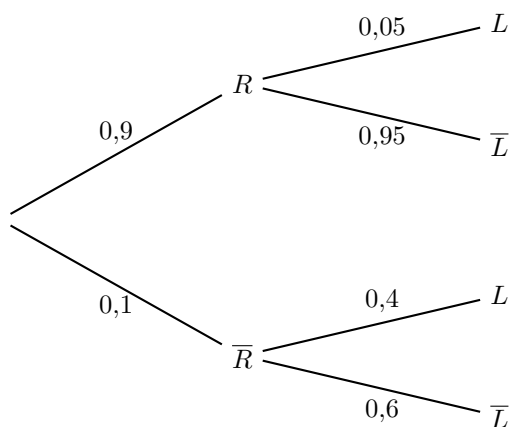
5 points

Un participant ne peut pas choisir les deux épreuves : l'événement « le participant a choisi le cross » est donc l'événement contraire $\bar{R}$.

1) a. « Parmi ceux qui ont choisi la randonnée, 5 % sont licenciés » : $P_R(L) = 0,05$.

b. « Parmi ceux qui ont choisi le cross, 40 % sont licenciés » : $P_{\bar{R}}(L) = 0,4$.

2) On a aussi $P(R) = 0,9$, $P(\bar{R}) = 0,1$, $P_R(\bar{L}) = 1 - 0,05 = 0,95$ et $P_{\bar{R}}(\bar{L}) = 1 - 0,4 = 0,6$.



3) a. $P(R \cap L) = P(R) \times P_R(L) = 0,9 \times 0,05 = 0,045$.

Interprétation : la probabilité que le participant interrogé ait choisi la randonnée et soit li-

cencié dans un club est égale à 0,045; autrement dit, 4,5 % des participants sont des randonneurs licenciés.

b. R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(L) = P(R \cap L) + P(\bar{R} \cap L) = 0,045 + 0,1 \times 0,4 = 0,045 + 0,04 = \boxed{0,085}.$$

4) On cherche la probabilité que le participant ait choisi le cross sachant qu'il est licencié :

$$P_L(\bar{R}) = \frac{P(\bar{R} \cap L)}{P(L)} = \frac{0,04}{0,085} = \frac{40}{85} = \boxed{\frac{8}{17}}.$$

Or $\frac{8}{17} < \frac{8,5}{17} = \frac{1}{2}$: cette probabilité est (légèrement) *inférieure* à 50 % (environ 47 %).

L'intuition du journaliste était donc **incorrecte** : même si un coureur du cross a beaucoup plus de chances d'être licencié qu'un randonneur, les randonneurs sont tellement plus nombreux qu'ils représentent plus de la moitié des licenciés.

5) R et L sont indépendants si et seulement si $P(R \cap L) = P(R) \times P(L)$. Or :

$$P(R) \times P(L) = 0,9 \times 0,085 = 0,0765 \quad \text{et} \quad P(R \cap L) = 0,045.$$

Comme $0,0765 \neq 0,045$, les événements R et L **ne sont pas indépendants**.

(Autre justification : $P_R(L) = 0,05 \neq P(L) = 0,085$.)

Exercice 3

4 points

- 1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = x - 2$ et $v(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$. Avec $(uv)' = u'v + uv'$:

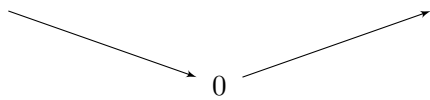
$$f'(x) = 1 \times e^x + (x - 2)e^x + 1 = (1 + x - 2)e^x + 1,$$

$$f'(x) = (x - 1)e^x + 1.$$

- 2) a. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, de la même façon (avec $u(x) = x - 1$, $u'(x) = 1$) :

$$g'(x) = 1 \times e^x + (x - 1)e^x = x e^x.$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$: $g'(x)$ est du signe de x . De plus $g(0) = (0 - 1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	−	0	+
e^x	+	+	+
$g'(x)$	−	0	+
g			

g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

- b. D'après le tableau de variations, g admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en $x = 0$, égal à $g(0) = 0$.
Donc, pour tout réel x , $g(x) \geq 0$, avec égalité seulement pour $x = 0$.

- 3) D'après la question 1, $f'(x) = (x - 1)e^x + 1 = g(x)$ pour tout réel x .

D'après la question 2.b, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(x) = 0$ uniquement pour $x = 0$ (valeur isolée).

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = (0 - 2)e^0 + 0 + 1 = -1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f			