

Première partie : Automatismes (QCM)

6 points

Question 1 Réponse **c.**

On réduit au même dénominateur : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{y + 2x}{xy}$. L'égalité devient $\frac{2x + y}{xy} = \frac{3}{u}$, d'où, en prenant les inverses (tous les nombres sont non nuls) :

$$\frac{u}{3} = \frac{xy}{2x + y} \iff \boxed{u = \frac{3xy}{2x + y}}$$

Question 2 Réponse **d.**

La somme des probabilités des six faces vaut 1 :

$$3x + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = 1 \iff 3x + \frac{6 + 10 + 3}{30} = 1 \iff 3x = \frac{11}{30} \iff \boxed{x = \frac{11}{90}}$$

Vérification : $3 \times \frac{11}{90} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$ et $\frac{11}{30} + \frac{19}{30} = 1$.

Question 3 Réponse **b.**

- $f_1(x) = \frac{x - 0,1}{0,9} = \frac{10}{9}x - \frac{1}{9}$: affine.
- $f_2(x) = -\frac{1}{2}x + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: affine (le coefficient constant est un nombre réel).
- On développe : $f_3(x) = (3x^2 - 2\sqrt{15}x + 5) - (7 - 2\sqrt{21}x + 3x^2) = (2\sqrt{21} - 2\sqrt{15})x - 2$: les termes en x^2 s'annulent, f_3 est affine.

Les trois fonctions sont donc **toutes affines**.

Question 4 Réponse **b.**

La droite coupe l'axe des ordonnées en $\frac{5}{3}$ et passe par les points $(-4; -1)$ et $(-1; 1)$: son coefficient directeur est $\frac{1 - (-1)}{-1 - (-4)} = \frac{2}{3}$. Une équation est $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$, soit, en multipliant par 3 :

$$3y = 2x + 5 \iff \boxed{2x - 3y + 5 = 0}$$

Les propositions a. et d. ont un coefficient directeur $\pm \frac{1}{3}$; la c. donne $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, d'ordonnée à l'origine négative.

Question 5 Réponse **a.**

$$(10x + 0,1)^2 = 100x^2 + 2x + 0,01 \quad (11x - 1,1)^2 = 121x^2 - 24,2x + 1,21$$

$$(10x + 0,1)^2 - (11x - 1,1)^2 = 100x^2 + 2x + 0,01 - 121x^2 + 24,2x - 1,21 = \boxed{-21x^2 + 26,2x - 1,2}$$

Question 6 Réponse **a.**

On lit $A(0; 1)$, $B(2; -1)$, $S(-2; 3)$ et R d'abscisse environ $-3,1$ et d'ordonnée négative. On étudie le signe du produit $x \times f(x)$:

- en $x_A = 0 : 0 \times 1 = 0 \leq 0$: oui;
- en $x_B = 2 : 2 \times (-1) = -2 \leq 0$: oui;
- en $x_S = -2 : -2 \times 3 = -6 \leq 0$: oui;
- en $x_R < 0$ avec $f(x_R) < 0$: le produit est strictement positif : non.

L'inéquation est vérifiée par exactement x_A, x_B et x_S .

Question 7 Réponse **c.**

$18 - 3x = 0 \iff x = 6$ et $5x + 20 = 0 \iff x = -4$. En développant, $f(x) = -15x^2 + 30x + 360$: c'est un polynôme du second degré de coefficient $a = -15 < 0$, il est donc **négatif à l'extérieur** des racines -4 et 6 et positif entre elles.

x	$-\infty$	-4	6	$+\infty$	
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Question 8 Réponse **d.**

La parabole est tournée vers le haut (coefficient de x^2 positif : on écarte c.), elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et coupe cet axe en -2 : son sommet est $(0; -2)$. Seule $x \mapsto x^2 - 2$ convient (b. a pour sommet $(0; 2)$ et a. s'annule en 0).

Vérification : $x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41$, ce qui correspond aux points d'intersection avec l'axe des abscisses lus sur la figure. Réponse : $x \mapsto x^2 - 2$.

Question 9 Réponse **d.**

$$cd = 4 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{5}, \text{ donc } \frac{b}{cd} = 2 \times \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{2} \text{ et}$$

$$G = \frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{6} + \frac{15}{6} = \frac{17}{6}.$$

Question 10 Réponse **c.**

$x^2 > 9 \iff x^2 - 9 > 0 \iff (x - 3)(x + 3) > 0$. Ce polynôme de coefficient $1 > 0$ est positif à l'extérieur de ses racines -3 et 3 :

$$\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[.$$

Les propositions a. et d. sont des intersections vides : elles ne peuvent pas convenir.

Question 11 Réponse **b.**

$$m = \frac{1 \times 10 + 2 \times 6 + x \times 13}{1 + 2 + x} = \frac{22 + 13x}{3 + x}.$$

Comme $3 + x > 0$ (un coefficient est positif) :

$$m = 12 \iff 22 + 13x = 12(3 + x) \iff 22 + 13x = 36 + 12x \iff \boxed{x = 14}.$$

Vérification : $\frac{22 + 13 \times 14}{17} = \frac{204}{17} = 12.$

Question 12 Réponse **c.**

On multiplie par la quantité conjuguée $2 + \sqrt{2}$:

$$\frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4 - 2} = \boxed{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}.$$

Deuxième partie

14 points

Exercice 1

Partie A – Le cas $k = 1$

- 1) Le quotient $\frac{MA}{MB}$ n'a de sens que pour $M \neq B$, c'est-à-dire $MB > 0$. Pour un tel point, en multipliant par $MB \neq 0$:

$$M \in \mathcal{L}_1 \iff \frac{MA}{MB} = 1 \iff \boxed{MA = MB}.$$

Le point B ne vérifie d'ailleurs pas $MA = MB$ (on aurait $AB = 0$, or A et B sont distincts) : l'équivalence est vraie pour tout point M du plan.

- 2) $\mathcal{L}_1$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B : c'est $\boxed{\text{la médiatrice du segment } [AB]}$.

Partie B – Le cas $k = 3$, avec $A(-2; 3)$ et $B(6; -1)$.

- 1) Dans un repère orthonormé :

$$MA^2 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \boxed{x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13}$$

$$MB^2 = (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = \boxed{x^2 + y^2 - 12x + 2y + 37}$$

- 2) Comme en partie A, B n'appartient pas à $\mathcal{L}_3$ et, pour $M \neq B$, $\frac{MA}{MB} = 3 \iff MA = 3MB$. Les

distances étant positives, elles sont égales si et seulement si leurs carrés le sont :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{L}_3 &\iff MA^2 = 9MB^2 \\ &\iff x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 9x^2 + 9y^2 - 108x + 18y + 333 \\ &\iff 0 = 8x^2 + 8y^2 - 112x + 24y + 320 \\ &\iff \boxed{x^2 + y^2 - 14x + 3y + 40 = 0} \quad (\text{division par } 8) \end{aligned}$$

3) On fait apparaître des carrés (forme canonique) :

$$x^2 - 14x = (x - 7)^2 - 49 \quad y^2 + 3y = \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{L}_3 &\iff (x - 7)^2 - 49 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 40 = 0 \\ &\iff (x - 7)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{45}{4} > 0$, on reconnaît l'équation du cercle de centre $\Omega\left(7; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon

$$R = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{9 \times 5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3,35.$$

4) a. Équation de la droite (AB). $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} x+2 \\ y-3 \end{smallmatrix}\right)$. Le point M est sur (AB) si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires :

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\iff (x+2) \times (-4) - (y-3) \times 8 = 0 \\ &\iff -4x - 8y + 16 = 0 \\ &\iff x + 2y = 4 \quad (\text{on divise par } -4) \end{aligned}$$

Vérification : A : $-2 + 2 \times 3 = 4$; B : $6 + 2 \times (-1) = 4$.

Intersection. Un point $M(x; y)$ est commun à $\mathcal{L}_3$ et à (AB) si et seulement si $x^2 + y^2 - 14x + 3y + 40 = 0$ et $x = 4 - 2y$. On remplace x par $4 - 2y$:

$$\begin{aligned} (4 - 2y)^2 + y^2 - 14(4 - 2y) + 3y + 40 &= 0 \\ \iff 16 - 16y + 4y^2 + y^2 - 56 + 28y + 3y + 40 &= 0 \\ \iff 5y^2 + 15y &= 0 \\ \iff 5y(y + 3) = 0 &\iff y(y + 3) = 0. \end{aligned}$$

Déterminer un point d'intersection revient donc bien à résoudre

$$\boxed{\begin{cases} y(y + 3) = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases}}$$

b. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $y = 0$ ou $y = -3$.

- si $y = 0$: $x = 4 - 0 = 4$;
- si $y = -3$: $x = 4 - 2 \times (-3) = 10$.

Les points d'intersection sont $I(4; 0)$ et $J(10; -3)$ (ou l'inverse).

Vérification avec la définition de $\mathcal{L}_3$: $IA = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$ et $IB = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$, d'où $\frac{IA}{IB} = 3$; $JA = \sqrt{144 + 36} = 6\sqrt{5}$ et $JB = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$, d'où $\frac{JA}{JB} = 3$.

c. Le milieu de $[IJ]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{4+10}{2}; \frac{0+(-3)}{2} \right) = \left(7; -\frac{3}{2} \right) : \text{c'est le centre } \Omega.$$

I et J sont deux points du cercle, et le milieu de $[IJ]$ est le centre du cercle, donc

$$[IJ] \text{ est un diamètre de } \mathcal{L}_3.$$

$$\text{Vérification : } IJ = \sqrt{(10-4)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 2R.$$

Exercice 2

Partie A – Existence

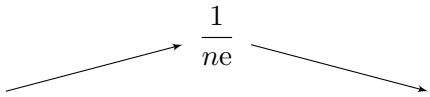
1) Soit $n \geq 1$. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^{nx}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = n e^{nx}$, et v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ($e^{nx} > 0$). Le quotient $f_n = \frac{u}{v}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \times e^{nx} - x \times n e^{nx}}{(e^{nx})^2} \\ &= \frac{e^{nx}(1 - nx)}{e^{nx} \times e^{nx}} = \boxed{\frac{1 - nx}{e^{nx}}}. \end{aligned}$$

2) Pour tout réel x , $e^{nx} > 0$: $f'_n(x)$ est du signe de $1 - nx$. Comme $n > 0$:

$$1 - nx > 0 \iff x < \frac{1}{n}.$$

$$\text{De plus } f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{e^1} = \frac{1}{ne}.$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
signe de $f'_n(x)$	+	0	-
variations de f_n			

La fonction f_n est croissante sur $]-\infty; \frac{1}{n}]$ puis décroissante sur $[\frac{1}{n}; +\infty[$: elle admet donc sur $\mathbb{R}$ un maximum

$$M_n = \frac{1}{ne} \text{ atteint en } \alpha_n = \frac{1}{n}.$$

Vérification sur le graphique : $S_1(1; 0,37)$, $S_2(0,5; 0,18)$, $S_4(0,25; 0,09)$, car $\frac{1}{e} \approx 0,368$.

Partie B – Comportement

1) D'après la partie A, $S_n(\alpha_n; M_n) = \left[S_n \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{ne} \right) \right]$.

On remarque que l'ordonnée de S_n est égale à son abscisse multipliée par $\frac{1}{e}$:

$$M_n = \frac{1}{e} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{e} \alpha_n.$$

Tous les points S_n appartiennent donc à la droite d'équation $y = \frac{1}{e} x$ (droite passant par l'origine) : les points S_n sont alignés.

2) a. Pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)},$$

donc

$$\overrightarrow{S_n S_{n+1}} = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{(n+1)e} - \frac{1}{ne} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{n(n+1)} \\ -\frac{1}{en(n+1)} \end{array} \right).$$

Dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} \ell_n &= \sqrt{\frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{e^2 n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{1}{n^2(n+1)^2} (1 + e^{-2})} \\ &= \frac{\sqrt{1 + e^{-2}}}{\sqrt{n^2(n+1)^2}} = \boxed{\frac{\sqrt{1 + e^{-2}}}{n(n+1)}} \quad \text{car } n(n+1) > 0. \end{aligned}$$

Vérification : $\ell_1 = \frac{\sqrt{1 + e^{-2}}}{2} \approx 0,533$, ce qui correspond à la distance entre $S_1(1; 0,368)$ et $S_2(0,5; 0,184)$: $\sqrt{0,5^2 + 0,184^2} \approx 0,533$.

b. Pour tout $n \geq 1$, on pose $c = \sqrt{1 + e^{-2}} > 0$:

$$\begin{aligned} \ell_{n+1} - \ell_n &= \frac{c}{(n+1)(n+2)} - \frac{c}{n(n+1)} = c \times \frac{n - (n+2)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-2c}{n(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Le numérateur est strictement négatif et le dénominateur strictement positif, donc $\ell_{n+1} - \ell_n < 0$ pour tout $n \geq 1$: la suite (ℓ_n) est strictement décroissante, donc monotone.

- c. Pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$, donc $\ell_k = c \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$.
Les termes se simplifient deux à deux :

$$\begin{aligned} u_n &= c \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= c \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = c \times \frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

soit

$$u_n = \frac{n\sqrt{1+e^{-2}}}{n+1}.$$

Vérification : pour $n = 1$, $u_1 = \frac{\sqrt{1+e^{-2}}}{2} = \ell_1$. C'est cohérent avec la géométrie : les points étant alignés et rangés dans l'ordre, u_n est la longueur S_1S_{n+1} .