

Calculatrice interdite

Première partie : Automatismes (QCM)

6 points

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

Question 1

On considère x, y, u des réels non nuls tels que $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{u}$. On peut affirmer que :

- a. $u = \frac{3xy}{x+2y}$ b. $u = \frac{2x+y}{3xy}$ c. $u = \frac{3xy}{2x+y}$ d. $u = \frac{x+2y}{3xy}$

Question 2

On lance un dé pipé à 6 faces. La probabilité d'obtenir chacune des faces est donnée dans le tableau ci-dessous :

Face numéro 1	Face numéro 2	Face numéro 3	Face numéro 4	Face numéro 5	Face numéro 6
x	x	x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	0,1

On peut affirmer que :

- a. $x = \frac{21}{90}$ b. $x = 0,21$ c. $x = \frac{1}{5}$ d. $x = \frac{11}{90}$

Question 3

On considère trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \frac{x - \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \quad f_2(x) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{x}{2} \quad f_3(x) = (x\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7} - x\sqrt{3})^2$$

Parmi ces trois fonctions, celles qui sont des fonctions affines sont :

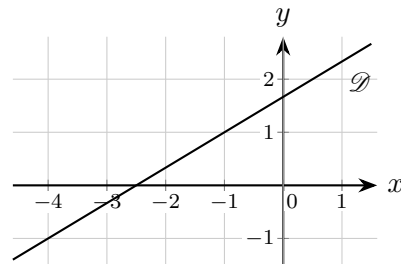
- a. aucune b. toutes
c. uniquement la fonction f_1 d. uniquement les fonctions f_1 et f_2

Question 4

On a représenté ci-contre une droite $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé.

Une équation de la droite $\mathcal{D}$ est :

- a. $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ b. $2x - 3y + 5 = 0$
c. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{6} = 0$ d. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

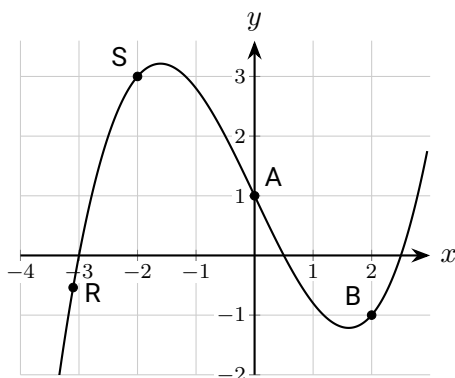


Question 5

L'expression développée de $(10x + 0,1)^2 - (11x - 1,1)^2$ est :

- a. $-21x^2 + 26,2x - 1,2$ b. $-21x^2 - 22,2x - 1,2$
c. $-21x^2 + 24,2x - 0,12$ d. $-21x^2 + 22,2x - 1,22$

Question 6



On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f .

Les points A, B, R et S appartiennent à la courbe $\mathcal{C}$.
Leurs abscisses sont notées respectivement x_A , x_B , x_R et x_S .

L'inéquation $x \times f(x) \leq 0$ est vérifiée par exactement :

- a. x_A , x_B et x_S b. x_A et x_R
c. x_A et x_S d. x_A et x_B

Question 7

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (18 - 3x)(5x + 20)$ admet pour tableau de signes :

a.

x	$-\infty$	-4	6	$+\infty$	
signe de $f(x)$	+	0	-	0	+

b.

x	$-\infty$	-6	4	$+\infty$	
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

C.

x	$-\infty$	-4	6	$+\infty$	
signe de $f(x)$	-	0	+	0	-

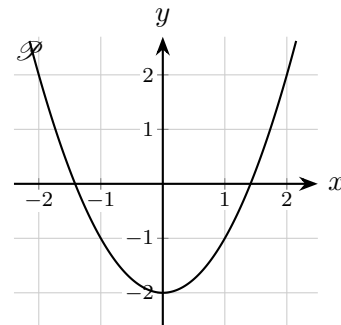
d.

x	$-\infty$	-6	4	$+\infty$	
signe de $f(x)$	+	0	-	0	+

Question 8

On a représenté ci-contre une parabole $\mathcal{P}$.
Une seule des quatre fonctions ci-dessous est susceptible d'être représentée par la parabole $\mathcal{P}$. Laquelle ?

- a. $x \mapsto x^2 - 2x$ b. $x \mapsto x^2 + 2$
c. $x \mapsto -x^2 + 2$ d. $x \mapsto x^2 - 2$



Question 9

On considère la relation $G = a - \frac{b}{cd}$.

Lorsque $a = \frac{1}{3}$, $b = 2$, $c = 4$, $d = -\frac{1}{5}$, la valeur de G est égale à :

- a. $\frac{19}{6}$ b. $-\frac{13}{3}$ c. $\frac{15}{2}$ d. $\frac{17}{6}$

Question 10

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 9$ sur $\mathbb{R}$. On a :

- a. $\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cap]3; +\infty[$ b. $\mathcal{S} =]3; +\infty[$
c. $\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ d. $\mathcal{S} =]-\infty; -3] \cap [3; +\infty[$

Question 11

Voici une série de notes avec les coefficients associés. On note m la moyenne de cette série. Que doit valoir x pour que $m = 12$?

Note	10	6	13
Coefficient	1	2	x

- a. impossible b. $x = 14$ c. $x = 10^{-3}$ d. $x = 3$

Question 12

L'inverse de $2 - \sqrt{2}$ est :

- a. $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$ b. $-2 + \sqrt{2}$ c. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ d. $2 + \sqrt{2}$

Deuxième partie

14 points

Exercice 1

A et B sont deux points distincts du plan et $k > 0$ une constante réelle.

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{L}_k$ des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

Partie A – Le cas particulier $k = 1$: détermination de $\mathcal{L}_1$

- 1) Montrer que $M \in \mathcal{L}_1 \iff MA = MB$.
- 2) En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{L}_1$.

Partie B – Le cas particulier $k = 3$: détermination de $\mathcal{L}_3$

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan et on considère les points $A(-2; 3)$, $B(6; -1)$ et $M(x; y)$ un point quelconque du plan.

- 1) Exprimer MA^2 et MB^2 en fonction de x et y .
- 2) En déduire que :

$$M \in \mathcal{L}_3 \iff x^2 + y^2 - 14x + 3y + 40 = 0.$$

- 3) Montrer que $\mathcal{L}_3$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon R .
- 4) On note I et J les points d'intersection de $\mathcal{L}_3$ avec la droite (AB).

- a. Montrer que déterminer les coordonnées d'un point d'intersection de $\mathcal{L}_3$ et de la droite (AB) revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} y(y+3) = 0 \\ x+2y = 4 \end{cases}$$

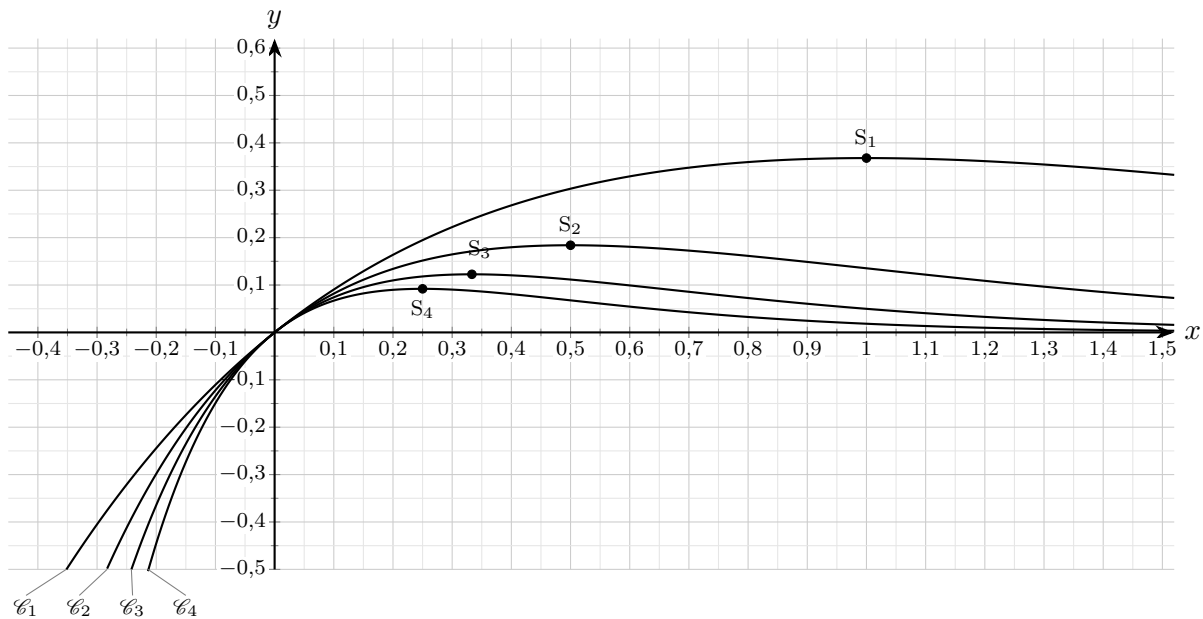
- b. En déduire les coordonnées des points I et J.
- c. Vérifier que le segment [IJ] est un diamètre du cercle $\mathcal{L}_3$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{e^{nx}}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n . On s'intéresse à l'existence et au comportement des sommets S_n des courbes $\mathcal{C}_n$.



Partie A – Existence

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f'_n(x) = \frac{1 - nx}{e^{nx}}.$$

- 2) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n admet un maximum M_n sur $\mathbb{R}$, atteint pour un réel α_n dont on précisera les valeurs.

Partie B – Comportement

Pour tout entier naturel n non nul, S_n est le point du plan de coordonnées $S_n (\alpha_n ; M_n)$.

- 1) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que le point S_n a pour coordonnées $S_n \left(\frac{1}{n} ; \frac{1}{ne} \right)$, puis en déduire que tous les points S_n sont alignés.
- 2) Soit (ℓ_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$\ell_n = S_n S_{n+1} = \left\| \overrightarrow{S_n S_{n+1}} \right\|.$$

- a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\ell_n = \frac{\sqrt{1 + e^{-2}}}{n(n+1)}.$$

- b. Montrer que la suite (ℓ_n) est monotone.

- c. Calculer :

$$u_n = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{n-1} + \ell_n.$$