

Automatismes

5 points

Question 1 : $\frac{1}{T} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$, donc T est l'inverse de $\frac{17}{6}$: $T = \frac{6}{17}$.

Réponse **a**

Question 2 : Diviser par $\frac{6}{x^3}$, c'est multiplier par son inverse $\frac{x^3}{6}$: $\frac{18x^5}{\frac{6}{x^3}} = 18x^5 \times \frac{x^3}{6} = \frac{18}{6} x^{5+3} = 3x^8$.

Réponse **a**

Question 3 : $\frac{a \times b}{c} = a \times \frac{b}{c} = \frac{b}{c} \times a$.

Réponse **c**

Question 4 : On met en facteur $(-2x - 6)$:

$$\begin{aligned} (-2x - 6)^2 - (-2x - 6)(-5x - 8) &= (-2x - 6)[(-2x - 6) - (-5x - 8)] \\ &= (-2x - 6)(-2x - 6 + 5x + 8) \\ &= (-2x - 6)(3x + 2). \end{aligned}$$

La proposition d est la forme développée (égale, mais pas factorisée).

Réponse **b**

Question 5 : $-2a - 3c = 7 \iff -3c = 2a + 7 \iff c = \frac{2a + 7}{-3} = \frac{-2a - 7}{3}$.

Réponse **a**

Question 6 : $3x - 9 < 9x + 9 \iff 3x - 9x < 9 + 9 \iff -6x < 18 \iff x > -3$ (on divise par $-6 < 0$, l'inégalité change de sens).

L'ensemble des solutions est $] -3 ; +\infty[$, -3 exclu (inégalité stricte).

Réponse **a**

Question 7 : $2x - 14 = 0 \iff x = 7$ et $-5x - 15 = 0 \iff x = -3$. $2x - 14$ est négatif puis positif (coefficient $2 > 0$); $-5x - 15$ est positif puis négatif (coefficient $-5 < 0$).

x	$-\infty$	-3	7	$+\infty$
$2x - 14$	$-$	$-$	0	$+$
$-5x - 15$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$

Vérification : $f(0) = (-14) \times (-15) = 210 > 0$, cohérent avec le signe $+$ entre -3 et 7 .

Réponse **c**

Exercice 1

3 points

1) Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, ensemble symétrique par rapport à 0 : pour tout réel x , $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -(2x^3 - x) = -f(x)$.

Donc **f est impaire**.

Pour tout réel x : $g(-x) = -5(-x)^2 + 3 = -5x^2 + 3 = g(x)$.

Donc g est paire.

2) Si f est impaire, alors pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$. Avec $x = 4$: $f(-4) = -f(4)$, donc

$$f(4) = -f(-4) = -7, \quad \boxed{f(4) = -7}.$$

Exercice 2

6 points

1) Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 4 - 5 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Un point $M(x; y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 &\iff (x+2) \times (-1) - (y-5) \times 3 = 0 \\ &\iff -x - 2 - 3y + 15 = 0 \\ &\iff -x - 3y + 13 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est $\boxed{x + 3y - 13 = 0}$.

Vérification : $A : -2 + 3 \times 5 - 13 = 0$ et $B : 1 + 3 \times 4 - 13 = 0$.

2) Un vecteur directeur de (AB) est $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (de la forme $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour $ax + by + c = 0$), et un vecteur directeur de (EF) , d'équation $x - 2y + 2 = 0$, est $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = (-3) \times 1 - 1 \times 2 = -5 \neq 0.$$

Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc

$\boxed{\text{les droites } (AB) \text{ et } (EF) \text{ ne sont pas parallèles}}.$

3) Les coordonnées de I vérifient les deux équations : $x + 3y = 13$ (droite (AB)) et $-x + 2y = 2$ (droite (EF) multipliée par -1).

En additionnant les deux lignes, x disparaît :

$$\begin{cases} x + 3y = 13 \\ -x + 2y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 13 \\ 5y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 13 - 3 \times 3 \\ y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Le système a pour unique solution le couple $(4; 3)$, donc $\boxed{I(4; 3)}$.

Vérification : $4 + 3 \times 3 = 13$ et $-4 + 2 \times 3 = 2$.

Exercice 3

6 points

Partie 1

- 1) $f(x) = -(x-3)^2 + 9$ est la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = 3$ et $\beta = 9$. Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas : f est croissante sur $]-\infty; 3]$ et décroissante sur $[3; +\infty[$.

Sur $[0; 6]$: f est croissante sur $[0; 3]$ et décroissante sur $[3; 6]$.

x	0	3	6
$f(x)$	0	9	0

- 2) $f(0) = -(0-3)^2 + 9 = -9 + 9 = 0$, $f(3) = 9$ et $f(6) = -(6-3)^2 + 9 = 0$.

D'après le tableau de variations, sur $[0; 6]$:

- le maximum de f est 9 , atteint en $x = 3$;
- le minimum de f est 0 , atteint en $x = 0$ et en $x = 6$.

On le voit aussi directement : $(x-3)^2 \geq 0$ donc $f(x) \leq 9$, avec égalité pour $x = 3$.

- 3) $f(x) = -(x^2 - 6x + 9) + 9 = -x^2 + 6x - 9 + 9$, donc $f(x) = -x^2 + 6x$.

Partie 2

- 1) E est sur le segment $[CD]$ de longueur 6 cm, donc $DE = CD - CE$: $DE = 6 - x$, avec $x \in [0; 6]$.

- 2) $DGFE$ est un rectangle de côtés $DE = 6 - x$ et $GD = CE = x$. Son aire vaut donc

$$\mathcal{A}(x) = GD \times DE = x(6 - x) = 6x - x^2.$$

- 3) D'après la partie 1, question 3, pour tout $x \in [0; 6]$, $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 6x = f(x)$.

D'après la partie 1, question 2, f admet sur $[0; 6]$ un maximum égal à 9, atteint pour $x = 3$.

L'aire de $DGFE$ est donc maximale pour $CE = 3$ cm ; elle vaut alors 9 cm² (le rectangle $DGFE$ est alors un carré de côté 3 cm).