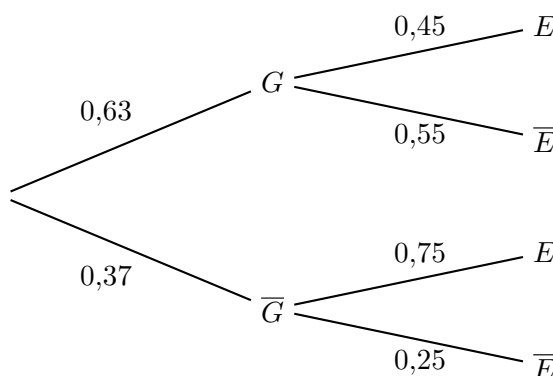


Exercice 1

8 points

- 1) Sur les 100 clients, 63 partent en groupe : $P(G) = \frac{63}{100} = 0,63$ et $P(\bar{G}) = 1 - 0,63 = 0,37$.
 Parmi les groupes, 55 % partent en France : $P_G(\bar{E}) = 0,55$, donc $P_G(E) = 0,45$.
 Parmi les personnes seules, 75 % partent à l'étranger : $P_{\bar{G}}(E) = 0,75$, donc $P_{\bar{G}}(\bar{E}) = 0,25$.



- 2) D'après l'arbre :

$$P(G \cap E) = P(G) \times P_G(E) = 0,63 \times 0,45 = \boxed{0,2835}.$$

Interprétation : la probabilité que le client choisi parte en groupe et à l'étranger est 0,2835 ; autrement dit, 28,35 % des clients interrogés partent en groupe à l'étranger.

- 3) G et $\bar{G}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(G \cap E) + P(\bar{G} \cap E) = 0,2835 + 0,37 \times 0,75 = 0,2835 + 0,2775 = \boxed{0,561}.$$

- 4) On cherche la probabilité conditionnelle $P_E(G)$:

$$P_E(G) = \frac{P(G \cap E)}{P(E)} = \frac{0,2835}{0,561} \approx 0,5053, \quad \text{soit} \quad \boxed{P_E(G) \approx 0,51}.$$

Un client qui part à l'étranger part en groupe avec une probabilité d'environ 0,51.

- 5) E et G sont indépendants si et seulement si $P(G \cap E) = P(G) \times P(E)$.
 Or $P(G) \times P(E) = 0,63 \times 0,561 = 0,35343$ et $P(G \cap E) = 0,2835$.
 Comme $0,2835 \neq 0,35343$, les événements E et G ne sont pas indépendants.
 (Autre justification : $P_G(E) = 0,45 \neq P(E) = 0,561$.)

Exercice 2

4 points

- 1) Pour tout réel x , $(e^{-2x+1})^2 = e^{2(-2x+1)} = e^{-4x+2}$ et $\frac{e^{4x}}{e^6} = e^{4x-6}$. Donc :

$$(e^{-2x+1})^2 = \frac{e^{4x}}{e^6} \iff e^{-4x+2} = e^{4x-6} \iff -4x+2 = 4x-6 \iff -8x = -8 \iff x = 1.$$

L'équation admet une unique solution : $\mathcal{S} = \{1\}$.

Vérification : $(e^{-1})^2 = e^{-2}$ et $\frac{e^4}{e^6} = e^{-2}$.

2) On pose $X = e^x$; alors $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$ et l'équation devient

$$X^2 + 2X - 3 = 0.$$

Discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 4$. Deux racines :

$$X_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

On revient à x :

- $e^x = -3$ n'a pas de solution, car $e^x > 0$ pour tout réel x ;
- $e^x = 1 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$.

L'équation admet une unique solution : $\mathcal{S} = \{0\}$.

Vérification : $e^0 + 2e^0 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$.

Exercice 3

6 points

1) $f = uv$ avec $u(x) = x^2 - 2,5x + 1$, $u'(x) = 2x - 2,5$, et $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$. Pour tout $x \in [-2; 2]$:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x - 2,5)e^x + (x^2 - 2,5x + 1)e^x$$

$$f'(x) = (x^2 - 0,5x - 1,5)e^x.$$

2) Pour tout réel x , $e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe du trinôme $x^2 - 0,5x - 1,5$.

$\Delta = (-0,5)^2 - 4 \times 1 \times (-1,5) = 0,25 + 6 = 6,25 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 2,5$. Racines :

$$x_1 = \frac{0,5-2,5}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{0,5+2,5}{2} = 1,5.$$

Les deux racines sont dans $[-2; 2]$. Le coefficient de x^2 est $1 > 0$: le trinôme est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles. Ainsi $f'(x) = (x+1)(x-1,5)e^x$.

Valeurs :

- $f(-2) = (4 + 5 + 1)e^{-2} = 10e^{-2} \approx 1,35$;
- $f(-1) = (1 + 2,5 + 1)e^{-1} = 4,5e^{-1} \approx 1,66$;
- $f(1,5) = (2,25 - 3,75 + 1)e^{1,5} = -0,5e^{1,5} \approx -2,24$;
- $f(2) = (4 - 5 + 1)e^2 = 0$.

x	-2	-1	$1,5$	2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$10e^{-2}$	$4,5e^{-1}$	$-0,5e^{1,5}$	0	

f est croissante sur $[-2; -1]$, décroissante sur $[-1; 1,5]$ et croissante sur $[1,5; 2]$.

3) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$$f(0) = (0 - 0 + 1)e^0 = 1 \text{ et } f'(0) = (0 - 0 - 1,5)e^0 = -1,5.$$

Donc la tangente a pour équation $y = -1,5x + 1$.