

Exercice 1

2 points

On lit sur la courbe les points où la fonction change de sens de variation :

- au départ, $f(-2) = -3$;
- la courbe monte jusqu'à son point le plus haut, de coordonnées $(2; 3,5)$;
- elle descend ensuite jusqu'à son point le plus bas, de coordonnées $(8; -1,5)$;
- elle remonte enfin jusqu'à $f(10) = 2$.

x	-2	2	8	10
f	-3	3,5	-1,5	2

Les valeurs 3,5 et -1,5 sont des lectures graphiques (elles correspondent aux points marqués de la courbe).

Exercice 2

7 points

- 1) Les valeurs prises par f aux creux du tableau sont 2 (en $x = -1$) et -2 (en $x = 6$). La plus petite est -2 : le minimum de f sur $[-6; 8]$ est -2 , atteint en $x = 6$.
- 2) Les valeurs prises aux sommets du tableau sont 3 (en $x = -6$), 3 (en $x = 0$) et 1 (en $x = 8$). Le maximum de f est donc 3, et il est atteint pour

$$x = -6 \text{ et } x = 0.$$

- 3) 1 et 3 appartiennent à l'intervalle $[0; 6]$, sur lequel f est décroissante. Une fonction décroissante change l'ordre : comme $1 < 3$, on a

$$f(1) > f(3).$$

(Le tableau indique une flèche descendante, donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.)

- 4) On ne peut pas utiliser un seul sens de variation : -2 et 7 ne sont pas dans le même intervalle. On encadre chaque image.
 - $-2 \in [-6; -1]$, intervalle sur lequel f décroît de 3 à 2 : donc $2 \leq f(-2) \leq 3$.
 - $7 \in [6; 8]$, intervalle sur lequel f croît de -2 à 1 : donc $-2 \leq f(7) \leq 1$.

Ainsi $f(7) \leq 1 < 2 \leq f(-2)$, d'où

$$f(-2) > f(7).$$

- 5) D'après la question 1), le minimum de f sur $[-6; 8]$ est -2 : pour tout $x \in [-6; 8]$, $f(x) \geq -2$. En particulier $f(7) \geq -2$, donc $f(7) \neq -3$. Le point $A(7; -3)$ n'appartient pas à la courbe représentant f .

- 6) Sur $[-1; 0]$, le tableau indique que f est croissante (elle passe de 2 à 3 sans changer de sens).
 Une fonction croissante sur un intervalle y est monotone : oui, f est monotone sur $[-1; 0]$
 (croissante).

Exercice 3

11 points

On a $f(x) = 0,5x^2 - 4x + 6$ pour $x \in [0; +\infty[$.

- 1) Le plongeur est sur l'axe des ordonnées, au point D d'abscisse 0. Sa hauteur est

$$f(0) = 0,5 \times 0^2 - 4 \times 0 + 6 = 6.$$

Le plongeur a une hauteur de 6 m.

- 2) On développe :

$$\begin{aligned} 0,5(x-2)(x-6) &= 0,5(x^2 - 6x - 2x + 12) \\ &= 0,5(x^2 - 8x + 12) \\ &= 0,5x^2 - 4x + 6 = f(x). \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 0,5(x-2)(x-6)$ pour tout $x \geq 0$.

La plongeuse rentre et ressort de l'eau lorsqu'elle est au niveau de l'eau, c'est-à-dire lorsque $f(x) = 0$:

$$0,5(x-2)(x-6) = 0 \iff x-2 = 0 \text{ ou } x-6 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = 6.$$

(Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ; $0,5 \neq 0$.)

La plongeuse rentre dans l'eau à 2 m de la verticale du plongeur et en ressort à 6 m.

- 3) On développe en utilisant $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} 0,5(x-4)^2 - 2 &= 0,5(x^2 - 8x + 16) - 2 \\ &= 0,5x^2 - 4x + 8 - 2 \\ &= 0,5x^2 - 4x + 6 = f(x). \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 0,5(x-4)^2 - 2$.

- 4) Pour tout réel x , un carré est positif : $(x-4)^2 \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &\geq 0 \\ \iff 0,5(x-4)^2 &\geq 0 && \text{(on multiplie par } 0,5 > 0) \\ \iff 0,5(x-4)^2 - 2 &\geq -2 && \text{(on retranche 2)} \end{aligned}$$

donc $f(x) \geq -2$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

$$f(4) = 0,5(4-4)^2 - 2 = 0 - 2, \text{ soit } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">f(4) = -2.$$

$f(x) \geq -2$ pour tout $x \geq 0$ et cette valeur est atteinte en $x = 4$: le minimum de f sur $[0; +\infty[$ est -2, atteint en $x = 4$.

5) Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= (0,5a^2 - 4a + 6) - (0,5b^2 - 4b + 6) \\ &= 0,5(a^2 - b^2) - 4(a - b) \\ &= 0,5(a - b)(a + b) - 4(a - b) && \text{(identité } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)) \\ &= (a - b)(0,5(a + b) - 4) && \text{(facteur commun } a - b) \\ &= 0,5(a - b)(a + b - 8). \end{aligned}$$

Donc $f(a) - f(b) = 0,5(a - b)(a + b - 8)$.

Signe. Comme $a < b$, on a $a - b < 0$; et $0,5 > 0$.

- Sur $[0; 4]$: $0 \leq a < b \leq 4$, donc $a + b < 4 + 4 = 8$, soit $a + b - 8 < 0$.

Le produit $0,5(a - b)(a + b - 8)$ a deux facteurs négatifs : $f(a) - f(b) > 0$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

- Sur $[4; +\infty[$: $4 \leq a < b$, donc $a + b > 4 + 4 = 8$, soit $a + b - 8 > 0$.

Le produit a un seul facteur négatif : $f(a) - f(b) < 0$, c'est-à-dire $f(a) < f(b)$.

Variations. Sur $[0; 4]$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$: f est **strictement décroissante**. Sur $[4; +\infty[$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$: f est **strictement croissante**.

x	0	4	$+\infty$
f	6	-2	

6) D'après la question 4), la plongeuse descend au plus bas à -2 : elle atteint au maximum 2 m de profondeur (en $x = 4$).

Or l'objet est à 2,5 m de profondeur, c'est-à-dire à l'ordonnée $-2,5$, et $-2,5 < -2$.

Non, la plongeuse ne pourra pas attraper l'objet : il lui manque 0,5 m.

Bonus

Rappel. Une fonction f définie sur I est **paire** si I est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in I$; elle est **impaire** si I est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in I$.

1) $I = [-5; -1] \cup [1; 5]$ est symétrique par rapport à 0 (si $x \in I$, alors $-x \in I$), et $0 \notin I$, donc f est bien définie.

Pour tout $x \in I$:

$$f(-x) = 3(-x) - \frac{3}{-x} = -3x + \frac{3}{x} = -\left(3x - \frac{3}{x}\right) = -f(x).$$

La fonction f est **impaire**.

2) $I = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. On teste avec $x = 1$:

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 2.$$

$f(-1) \neq f(1)$: f n'est pas paire; $f(-1) \neq -f(1) = 0$: f n'est pas impaire.

La fonction f n'est ni paire, ni impaire.

3) $I = [-2; 3]$ n'est pas symétrique par rapport à 0 : par exemple $3 \in I$ mais $-3 \notin I$.

La fonction f n'est donc ni paire, ni impaire sur I (même si l'expression $3x^2 + 1$ vérifie $3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1$).