

Exercice 1

5 points

On rappelle que si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

1) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -3 - 1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x - (-2) \\ 5 - 1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x + 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2) Le déterminant de $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$. Ici :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 6 \times 4 - (-4) \times (x + 2) = 24 + 4x + 8 = \boxed{32 + 4x}.$$

3) Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si leur déterminant est nul :

$$32 + 4x = 0 \iff 4x = -32 \iff x = -8.$$

Les points A, B et C sont alignés pour $\boxed{x = -8}$, c'est-à-dire pour $C(-8; 5)$.

Vérification : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{AB}$, les vecteurs sont bien colinéaires.

Exercice 2

7 points

1) a. On note $E(x_E; y_E)$. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, donc $3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x_E + 2 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} x_E + 2 = 12 \\ y_E - 4 = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} x_E = 10 \\ y_E = -8 \end{cases} \text{ donc } \boxed{E(10; -8)}.$$

b. C est le milieu de $[AF]$, donc $x_C = \frac{x_A + x_F}{2}$ et $y_C = \frac{y_A + y_F}{2}$, soit $x_F = 2x_C - x_A$ et $y_F = 2y_C - y_A$:

$$x_F = 2 \times 4 - (-2) = 10, \quad y_F = 2 \times 2 - 4 = 0, \quad \text{donc } \boxed{F(10; 0)}.$$

c. On note $G(x_G; y_G)$. On a $\overrightarrow{DA} \begin{pmatrix} -2 - 6 \\ 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} -2 - x_G \\ 4 - y_G \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} \iff \begin{cases} -2 - x_G = -12 \\ 4 - y_G = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_G = 10 \\ y_G = 7 \end{cases} \text{ donc } \boxed{G(10; 7)}.$$

2) On calcule $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 10 - 10 \\ 0 - (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 10 - 10 \\ 7 - (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}) = 0 \times 15 - 8 \times 0 = 0.$$

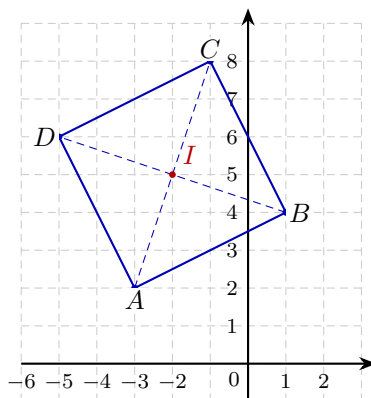
Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, donc les points E , F et G sont alignés.

Remarque : les trois points ont la même abscisse 10 ; ils sont tous sur la droite d'équation $x = 10$.

Exercice 3

8 points

- 1) Les quatre points sont placés ci-dessous. Le quadrilatère $ABCD$ est tracé en bleu, ses diagonales en pointillés.



2) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 4 - 2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -1 - (-5) \\ 8 - 6 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ils sont en particulier colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

De plus, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que $ABCD$ est un **parallélogramme**.

- 3) Le repère est orthonormé, donc $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$:

$$AC = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}, \quad \text{soit } \boxed{AC = 2\sqrt{10}},$$

$$DB = \sqrt{(1 - (-5))^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}, \quad \text{soit } \boxed{DB = 2\sqrt{10}}.$$

- 4) $ABCD$ est un parallélogramme (question 2) dont les diagonales $[AC]$ et $[DB]$ ont la même longueur (question 3) : c'est donc un **rectangle**.

Pour obtenir la nature exacte, on compare deux côtés consécutifs :

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \quad \text{et} \quad AD = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}.$$

Le rectangle $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur : $ABCD$ est un carré.

- 5) Le centre I d'un parallélogramme est le milieu commun de ses diagonales. Milieu de $[AC]$:

$$x_I = \frac{-3 + (-1)}{2} = -2, \quad y_I = \frac{2 + 8}{2} = 5, \quad \text{donc } \boxed{I(-2; 5)}.$$

Vérification : le milieu de $[DB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{-5 + 1}{2}; \frac{6 + 4}{2}\right) = (-2; 5)$.

Bonus

On exprime tous les vecteurs à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- I est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

On remarque que $\frac{6}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 2\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$, donc $\boxed{\overrightarrow{IL} = 2\overrightarrow{IK}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont colinéaires et ont le point I en commun, donc :

les points I , K et L sont alignés.

Vérification dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $I(0; \frac{1}{2})$, $K(\frac{3}{5}; 0)$, $L(\frac{6}{5}; -\frac{1}{2})$; $\overrightarrow{IK}\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IL}\left(\frac{6}{5}; -1\right)$, et
 $\det = \frac{3}{5} \times (-1) - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{6}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = 0$.