

Exercice 1

3 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ ».

Initialisation. $2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 0 = 2 \times 1 + 0 = 2 = u_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1 \\ &= \frac{2}{3} \left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n \right) + \frac{1}{3} n + 1 \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{2}{3} n + \frac{1}{3} n + 1 \quad (\text{car } \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}) \\ &= 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + (n+1). \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Vérification : $u_1 = \frac{2}{3} \times 2 + 0 + 1 = \frac{7}{3}$ et $2 \times \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3}$.

Exercice 2

6 points

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 2 v_{n+1} - 70 = 2 \left(\frac{8}{7} v_n - 5 \right) - 70 \\ &= \frac{16}{7} v_n - 10 - 70 = \frac{16}{7} v_n - 80 \\ &= \frac{8}{7} (2 v_n - 70) \quad (\text{car } \frac{8}{7} \times 70 = 80) \\ &= \frac{8}{7} w_n. \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{8}{7}$, de premier terme

$$w_0 = 2 v_0 - 70 = 2 \times \left(-\frac{7}{4} \right) - 70 = -\frac{7}{2} - \frac{140}{2} = -\frac{147}{2}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n$, soit $w_n = -\frac{147}{2} \times \left(\frac{8}{7}\right)^n$.

Comme $w_n = 2v_n - 70$, on a $v_n = \frac{w_n + 70}{2} = \frac{w_n}{2} + 35$, d'où

$$v_n = -\frac{147}{4} \times \left(\frac{8}{7}\right)^n + 35.$$

Vérification : $v_0 = -\frac{147}{4} + \frac{140}{4} = -\frac{7}{4}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -\frac{147}{4} \times \left(\frac{8}{7}\right)^{n+1} + 35 + \frac{147}{4} \times \left(\frac{8}{7}\right)^n - 35 \\ &= -\frac{147}{4} \times \left(\frac{8}{7}\right)^n \times \left(\frac{8}{7} - 1\right) \\ &= -\frac{147}{4} \times \frac{1}{7} \times \left(\frac{8}{7}\right)^n = -\frac{21}{4} \times \left(\frac{8}{7}\right)^n. \end{aligned}$$

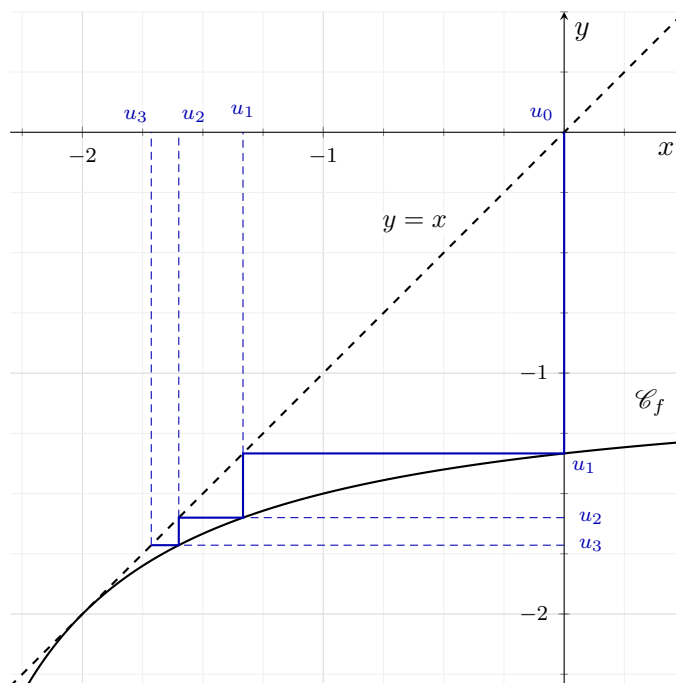
Or $\left(\frac{8}{7}\right)^n > 0$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n : la suite (v_n) est strictement décroissante.

Autre rédaction : $\frac{8}{7} > 1$, donc la suite $\left(\left(\frac{8}{7}\right)^n\right)$ est strictement croissante; en la multipliant par $-\frac{147}{4} < 0$, on obtient une suite strictement décroissante, et ajouter 35 ne change pas le sens de variation.

Exercice 3

11 points

- 1) a. On part de $u_0 = 0$ sur l'axe des abscisses. On descend verticalement jusqu'à $\mathcal{C}_f$: l'ordonnée obtenue est $f(u_0) = u_1$. On la reporte sur l'axe des abscisses grâce à la droite $y = x$, et l'on recommence.



Par le calcul :

$$u_1 = f(0) = -\frac{4}{3} \approx -1,33; \quad u_2 = f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{5} = -1,6; \quad u_3 = f\left(-\frac{8}{5}\right) = -\frac{12}{7} \approx -1,71.$$

- b. Les termes se déplacent vers la gauche : on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

Ils semblent aussi se rapprocher de -2 , abscisse du point où $\mathcal{C}_f$ touche la droite $y = x$.

- 2) f est un quotient de fonctions dérivables sur $]-3; +\infty[$, dont le dénominateur $x + 3$ ne s'annule pas sur cet intervalle; elle y est donc dérivable. Avec $u(x) = -x - 4$, $u'(x) = -1$, $v(x) = x + 3$, $v'(x) = 1$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{-(x+3) - (-x-4)}{(x+3)^2} = \frac{-x-3+x+4}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2}.$$

Pour tout $x > -3$, $(x+3)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$. Ainsi :

f est strictement croissante sur $]-3; +\infty[$.

- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $-2 < u_{n+1} \leq u_n$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = -\frac{4}{3}$. On a bien $-2 < -\frac{4}{3} \leq 0$, soit $-2 < u_1 \leq u_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Les nombres -2 , u_{n+1} et u_n appartiennent alors à

$] -3; +\infty[$, sur lequel f est strictement croissante (question 2). Donc :

$$\begin{aligned} -2 &< u_{n+1} \leq u_n \\ \Leftrightarrow f(-2) &< f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad (f \text{ strictement croissante : l'ordre est conservé}) \\ \Leftrightarrow -2 &< u_{n+2} \leq u_{n+1} \quad (\text{car } f(-2) = \frac{2-4}{-2+3} = -2) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{-2 < u_{n+1} \leq u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Conséquence. Pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante. De plus $u_0 = 0 > -2$ et $u_{n+1} > -2$ pour tout n : la suite est minorée par -2 .
(Décroissante et minorée, elle est donc convergente, d'après le théorème de convergence monotone.)

4) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -2 > -3$ (question 3), donc $u_n + 3 \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-u_n - 4}{u_n + 3} - u_n = \frac{-u_n - 4 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} \\ &= \frac{-u_n - 4 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{-(u_n^2 + 4u_n + 4)}{u_n + 3} \\ &= \boxed{\frac{-(u_n + 2)^2}{u_n + 3}} \quad (\text{identité remarquable}) \end{aligned}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $u_n > -2$, donc $u_n + 2 > 0$ et $-(u_n + 2)^2 < 0$;
- $u_n > -2$, donc $u_n + 3 > 1 > 0$.

Le quotient est donc strictement négatif : $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n .

La suite (u_n) est strictement décroissante, ce qui confirme (et précise) la question 3.

Bonus

+ 1 point

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $P(n)$ la propriété : « $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ ».

Initialisation. Pour $n = 2$, le produit n'a qu'un facteur : $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$, et $\frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$. $P(2)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \left[\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \right] \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n+1}{2n} \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n+1}{2n} \times \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n+1}{2n} \times \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} && \text{(car } (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n) \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{(n+1) + 1}{2(n+1)}. && \text{(on simplifie par } n(n+1) \neq 0) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(2)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \text{ pour tout entier } n \geq 2.$$

Vérification : pour $n = 3$, $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.