

Calculatrice interdite

Tout résultat devra être justifié, encadré ou souligné.

Exercice 1

3 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

Exercice 2

6 points

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = -\frac{7}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{8}{7}v_n - 5.$$

On définit à présent la suite (w_n) par $w_n = 2v_n - 70$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{8}{7}$ et de premier terme w_0 à déterminer. (2,5 pts)
- 2) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n , puis démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (1,5 pts)

$$v_n = -\frac{147}{4} \times \left(\frac{8}{7}\right)^n + 35.$$

- 3) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) . (2 pts)

Exercice 3

11 points

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3} \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

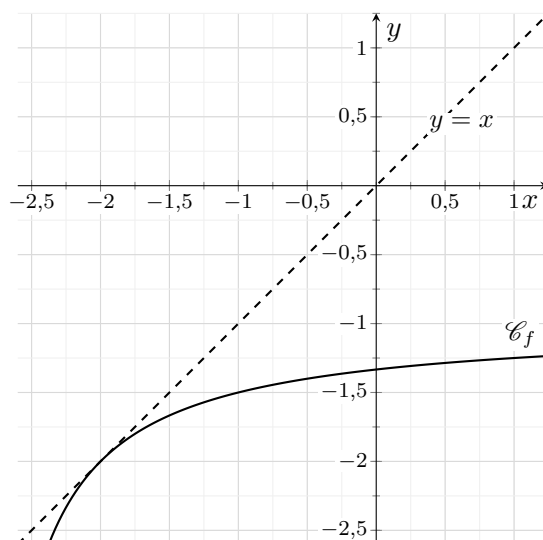
On note f la fonction définie sur $] -3 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x-4}{x+3}$. Ainsi, pour tout entier naturel n , on a

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

1) On donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$. (2 pts)

a. Représenter sur le graphique ci-dessous les quatre premiers termes de la suite (u_n) . On laissera apparents les traits de construction et on fera apparaître le chemin formé.



b. Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de la suite (u_n) ?

2) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$. (2 pts)

3) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $-2 < u_{n+1} \leq u_n$. (3,5 pts)

Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ? (0,5 pt)

4) On souhaite à présent étudier le sens de variation de la suite (u_n) en utilisant une autre méthode.

a. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 2)^2}{u_n + 3}$. (1,5 pts)

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) . (1,5 pts)

Bonus

+ 1 point

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$