

Question de cours

Définition. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $m \times n$ et soit λ un réel. On appelle produit de la matrice A par le réel λ la matrice $\lambda A = (c_{ij})$ définie par :

$$\forall (i; j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}, \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Autrement dit, on multiplie chaque coefficient de A par λ ; la matrice λA a la même taille $m \times n$ que A .

Exercice

- 1) On peut calculer $A + B$ si, et seulement si, A et B ont la même taille, disons $m \times n$.
On peut calculer AB si, et seulement si, le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B , c'est-à-dire ici $n = m$.
Il suffit donc de prendre des matrices de même taille qui ne sont pas carrées.

Contre-exemple. $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont de taille 2×3 : la somme $A + B$ existe (taille 2×3), mais A a 3 colonnes et B a 2 lignes, donc le produit AB n'est pas défini.
L'affirmation est fausse. (Elle devient vraie si A et B sont carrées de même ordre.)

- 2) On isole C :

$$3F - 2C + I_3 = O_3 \iff 2C = 3F + I_3 \iff C = \frac{1}{2}(3F + I_3).$$

Or

$$3F + I_3 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ -3 & 15 & 6 \\ 3 & 12 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -3 \\ -3 & 16 & 6 \\ 3 & 12 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 8 & 3 \\ \frac{3}{2} & 6 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vérification : $2C = 3F + I_3$, donc $3F - 2C + I_3 = 3F - (3F + I_3) + I_3 = O_3$.

- 3) F est de taille 3×3 et G de taille 3×2 : le produit FG est défini et de taille 3×2 . Chaque coefficient

est le produit d'une ligne de F par une colonne de G :

$$FG = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 2 \times (-5) + (-1) \times 1 & 3 \times 0 + 2 \times 3 + (-1) \times (-2) \\ (-1) \times 2 + 5 \times (-5) + 2 \times 1 & (-1) \times 0 + 5 \times 3 + 2 \times (-2) \\ 1 \times 2 + 4 \times (-5) + 0 \times 1 & 1 \times 0 + 4 \times 3 + 0 \times (-2) \end{pmatrix}$$

$$FG = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -25 & 11 \\ -18 & 12 \end{pmatrix}$$

4) Les tailles connues sont : $G : 3 \times 2$, $C : 2 \times 2$, $E : 4 \times 3$, $F : 3 \times 3$, $N : 3 \times 1$.

a. Pour que le produit CP soit défini, le nombre de lignes de P doit être égal au nombre de colonnes de C , soit 2.

Pour que le produit PE soit défini, le nombre de colonnes de P doit être égal au nombre de lignes de E , soit 4.

Les autres produits sont alors compatibles : $G (3 \times 2)$ par $C (2 \times 2)$, $E (4 \times 3)$ par $F (3 \times 3)$, $F (3 \times 3)$ par $N (3 \times 1)$.

La matrice P doit donc être de taille $\boxed{2 \times 4}$.

b. Le produit a autant de lignes que la première matrice $G (3)$ et autant de colonnes que la dernière matrice $N (1)$:

$$\underbrace{G}_{3 \times 2} \underbrace{C}_{2 \times 2} \underbrace{P}_{2 \times 4} \underbrace{E}_{4 \times 3} \underbrace{F}_{3 \times 3} \underbrace{N}_{3 \times 1} \text{ est de taille } \boxed{3 \times 1}.$$

5) On note x et y les coefficients manquants : $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y & 5 \\ x + 2y & 4 \end{pmatrix}$.

La deuxième colonne vaut bien $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ($3 \times 2 - 1 = 5$ et $2 + 2 = 4$). La première colonne donne le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 11 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x - 11 \\ x + 2(3x - 11) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x - 11 \\ 7x = 21 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vérification : $3 \times 3 - (-2) = 11$ et $3 + 2 \times (-2) = -1$.

6) Le produit matriciel n'est pas commutatif : pour factoriser, le facteur commun doit être placé du même côté dans chaque terme. On note I_p la matrice identité d'ordre p , qui vérifie $HI_p = I_pH = H$.

a. $H^2 - 7H = HH - 7HI_p$, donc

$$H^2 - 7H = H(H - 7I_p)$$

(on peut aussi écrire $(H - 7I_p)H$, car H commute avec H et avec I_p). Attention : $H - 7$ n'a pas de sens, on ne peut pas soustraire un réel à une matrice.

- b. Dans $5AH$, la matrice H est à droite; dans HB , elle est à gauche. Factoriser par H à gauche demanderait d'écrire $5AH = H(5A)$, c'est-à-dire $AH = HA$, ce qui est faux en général.

Par exemple, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $AH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $HA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On ne peut pas factoriser $5AH + HB$ dans le cas général (ce serait possible, sous la forme $H(5A + B)$, seulement si A et H commutent).

- c. La matrice A est à droite dans les deux termes :

$$2HA + 3BA = (2H + 3B)A$$

- 7) Pour $i \geq j$ (coefficients sur la diagonale et en dessous), $b_{ij} = 2$; pour $i < j$ (au-dessus de la diagonale), $b_{ij} = 0$. La matrice est carrée d'ordre 4 :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Par exemple $b_{31} = 2$ car $3 \geq 1$, et $b_{24} = 0$ car $2 < 4$. La matrice B est triangulaire inférieure.

- 8) a. Une matrice diagonale a tous ses coefficients nuls en dehors de la diagonale. Il suffit de choisir quatre coefficients diagonaux de somme 9, par exemple $1 + 2 + 3 + 3 = 9$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Tr}(D) = 1 + 2 + 3 + 3 = 9.$$

Il y a une infinité de réponses possibles (par exemple aussi $D = \text{diag}(9, 0, 0, 0)$).

- b. On examine les deux implications.

Sens direct. Une matrice strictement triangulaire (inférieure ou supérieure) a tous ses coefficients diagonaux nuls : $a_{ii} = 0$ pour tout i . Donc $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n 0 = 0$. Cette implication est vraie.

Réciproque. Elle est fautive : une trace nulle n'impose pas que les coefficients diagonaux soient nuls, ni que la matrice soit triangulaire.

Contre-exemple pour $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\text{Tr}(A) = 1 + (-1) = 0$, mais ses coefficients diagonaux ne sont pas nuls : elle n'est pas strictement triangulaire.

Pour un ordre $n \geq 2$ quelconque, la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1, -1, 0, \dots, 0$ convient.

L'équivalence est donc **fautive** : seule l'implication « strictement triangulaire $\Rightarrow \text{Tr}(A) = 0$ » est vraie.