

### Calculatrice interdite

Le soin et la précision des justifications seront pris en compte dans la notation.

## Question de cours

Compléter la définition suivante.

**Définition.** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice de taille  $m \times n$  et soit  $\lambda$  un réel.

On appelle produit de la matrice  $A$  par le réel  $\lambda$  la matrice  $\lambda A = (c_{ij})$  définie par :

$$\forall (i; j) \in \dots\dots\dots, \dots\dots\dots$$

## Exercice

Chaque réponse doit être justifiée.

- 1) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices. Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :  
« Si on peut calculer la matrice  $A + B$ , alors on peut calculer la matrice  $AB$ . »

- 2) Soit  $F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer la matrice  $C$  telle que  $3F - 2C + I_3 = O_3$ .

- 3) Soit  $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $F$  la matrice de la question précédente. Calculer  $FG$ .

- 4) On considère les matrices  $F$  et  $G$  précédentes, ainsi que les matrices

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

et  $E$  une matrice à 4 lignes et 3 colonnes.

- Quelle doit être la taille de la matrice  $P$  pour que le produit  $GCPEFN$  soit défini ?
- Quelle est alors la taille de la matrice  $GCPEFN$  ?

- 5) Compléter les coefficients manquants :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 2 \\ \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

6) Soient  $H$ ,  $A$  et  $B$  des matrices carrées d'ordre  $p$  ( $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ). Si cela est possible, factoriser les expressions suivantes :

- a.  $H^2 - 7H$ ;
- b.  $5AH + HB$ ;
- c.  $2HA + 3BA$ .

7) Soit  $B = (b_{ij})$  la matrice carrée d'ordre 4 telle que :

$$b_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Écrire les coefficients de cette matrice  $B$ .

8) Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$  (où  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ). La trace de  $A$ , notée  $\text{Tr}(A)$ , est le réel défini par :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- a. Écrire une matrice diagonale  $D$  d'ordre 4 telle que  $\text{Tr}(D) = 9$ .
- b. Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant :  
« Soit  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ . Une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$  est strictement triangulaire si, et seulement si,  $\text{Tr}(A) = 0$ . »