

Exercice 1

3,5 points

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = w_{n+1} + 1 = -8w_n - 9 + 1 = -8w_n - 8 = -8(w_n + 1) = -8v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $q = -8$ et de premier terme $v_0 = w_0 + 1 = 5 + 1$, soit $v_0 = 6$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$, soit

$$v_n = 6 \times (-8)^n.$$

Attention aux parenthèses : $(-8)^n$ et -8^n sont différents (par exemple $(-8)^2 = 64$ alors que $-8^2 = -64$).

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = w_n + 1$, donc $w_n = v_n - 1$:

$$w_n = 6 \times (-8)^n - 1.$$

Vérification : $w_0 = 6 - 1 = 5$ et $w_1 = 6 \times (-8) - 1 = -49$, qui est bien égal à $-8 \times 5 - 9$.

Exercice 2

3 points

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + 6n = 3 + 6n$, donc $u_{30} = 3 + 6 \times 30 = 183$.

S_1 est la somme de 31 termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S_1 = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = 31 \times \frac{3 + 183}{2} = 31 \times 93,$$

$$\text{soit } S_1 = 2883.$$

2) S_2 est la somme de 13 termes consécutifs (v_0 à v_{12}) d'une suite géométrique de raison $1,2 \neq 1$:

$$S_2 = v_0 \times \frac{1 - 1,2^{13}}{1 - 1,2} = 4 \times \frac{1 - 1,2^{13}}{-0,2} = 20(1,2^{13} - 1),$$

$$\text{soit } S_2 \approx 193,986 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près, à la calculatrice).}$$

Exercice 3

2,5 points

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -3(n+1)^2 - 41(n+1) + 40 - (-3n^2 - 41n + 40) \\ &= -3(n^2 + 2n + 1) - 41n - 41 + 40 + 3n^2 + 41n - 40 \\ &= -3n^2 - 6n - 3 - 41 + 3n^2 \\ &= -6n - 44. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ donc $-6n \leq 0$ et $-6n - 44 \leq -44 < 0$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n : la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

Vérification : $u_0 = 40$, $u_1 = -4$, $u_2 = -54$, et $u_1 - u_0 = -44$, $u_2 - u_1 = -50 = -6 \times 1 - 44$.

Exercice 4

3 points

On cherche le premier rang n tel que $v_n > 5000$: la boucle doit donc tourner *tant que* $v_n \leq 5000$. À chaque tour, on passe au rang suivant et on calcule le terme suivant.

```

1 def rangSeuil():
2     n = 0
3     v = 12
4     while v <= 5000:
5         n = n + 1
6         v = 1.2*v + 18
7     return n

```

En Python, le produit s'écrit avec $*$ et la virgule décimale avec un point : $1.2*v$.

À la calculatrice (mode suite ou tableau de valeurs), on obtient :

$$v_{21} \approx 4602,5 \leq 5000 \quad \text{et} \quad v_{22} \approx 5541,0 > 5000.$$

La fonction renvoie donc **22**.

Exercice 5

4 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = 3 + 4^{n+1}$ ».

Initialisation. $3 + 4^{0+1} = 3 + 4 = 7$ et $u_0 = 7$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
 u_n &= 3 + 4^{n+1} \\
 \iff 4u_n &= 12 + 4 \times 4^{n+1} && \text{(on multiplie par } 4 \neq 0) \\
 \iff 4u_n &= 12 + 4^{n+2} && \text{(car } 4 \times 4^{n+1} = 4^{n+2}) \\
 \iff 4u_n - 9 &= 3 + 4^{n+2} && \text{(on retranche 9)} \\
 \iff u_{n+1} &= 3 + 4^{(n+1)+1} && \text{(car } u_{n+1} = 4u_n - 9)
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$u_n = 3 + 4^{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Vérification : $u_1 = 4 \times 7 - 9 = 19 = 3 + 4^2$ et $u_2 = 4 \times 19 - 9 = 67 = 3 + 4^3$.

Exercice 6

4 points

- f est une somme : $\left(\frac{9}{10}x^2\right)' = \frac{9}{10} \times 2x = \frac{9x}{5}$, $\left(\frac{5}{8}x\right)' = \frac{5}{8}$ et la dérivée d'une constante est nulle :

$$\boxed{f'(x) = \frac{9x}{5} + \frac{5}{8}} \quad \text{soit } f'(x) = 1,8x + 0,625.$$

- $g = \frac{1}{v}$ avec $v(x) = 8x - 5$ et $v'(x) = 8$. Comme $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$:

$$\boxed{g'(x) = -\frac{8}{(8x - 5)^2}}.$$

- $h = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 10x + 3$, $u'(x) = 10$, $v(x) = -10x - 1$, $v'(x) = -10$. Comme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$h'(x) = \frac{10(-10x - 1) - (10x + 3) \times (-10)}{(-10x - 1)^2} = \frac{-100x - 10 + 100x + 30}{(-10x - 1)^2},$$

$$\text{soit } \boxed{h'(x) = \frac{20}{(-10x - 1)^2} = \frac{20}{(10x + 1)^2}} \quad (\text{car } (-a)^2 = a^2).$$

- $k = e^w$ avec $w(x) = 3x + 1$ et $w'(x) = 3$. Comme $(e^w)' = w' e^w$:

$$\boxed{k'(x) = 3e^{3x+1}}.$$