

Exercice 1 : Deux documents qui ne disent pas la même chose

6 points

$$1) z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{2\sqrt{3} + 2i}.$$

Numériquement, $2\sqrt{3} \approx 3,46$ et la partie imaginaire vaut exactement 2 : le relevé (3,46 ; 2,00) du document 2 est donc bien compatible pour le point A. Le désaccord ne porte pas sur le point de saisie.

2) D'après le document 1, B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, ce qui s'écrit $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times z_A$. Les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent :

$$z_B = 4e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} \quad \text{avec} \quad \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \quad \text{donc} \quad \boxed{z_B = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}}.$$

Sous forme algébrique :

$$z_B = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{-2\sqrt{3} + 2i} \approx -3,46 + 2,00i.$$

Le point B attendu a donc pour coordonnées $(-3,46 ; 2,00)$ à 10^{-2} près.

3) **Non.** Le relevé donne B en $(-3,46 ; -2,00)$: l'abscisse correspond bien à celle attendue, mais l'ordonnée est l'opposée de celle que prévoit le document 1 ($-2,00$ au lieu de $2,00$). Les deux documents sont donc incompatibles.

4) Avec $z'_B = -2\sqrt{3} - 2i$ et $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$, on remarque immédiatement que z'_B est l'opposé de z_A :

$$\frac{z'_B}{z_A} = \frac{-(2\sqrt{3} + 2i)}{2\sqrt{3} + 2i} = \boxed{-1}.$$

Le rapport est donc un nombre *réel* de module 1, et $-1 = e^{i\pi}$. La transformation réellement effectuée est la rotation de centre O et d'angle π – on peut aussi la décrire comme l'homothétie de centre O et de rapport -1 , ou comme la symétrie par rapport à O : pour un demi-tour, les trois descriptions coïncident.

5) *Exemple de rédaction attendue.*

« Le point de saisie A est conforme aux deux documents. En revanche, la note du service méthodes annonce une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, alors que le relevé de l'atelier correspond à une rotation d'angle π . C'est donc le **document 1 qui est en défaut sur le seul angle de rotation** : le bras tourne d'un demi-tour et non des deux tiers de tour prévus. La pièce est déposée en $(-3,46 ; -2,00)$ au lieu de $(-3,46 ; 2,00)$. »

Toute conclusion équivalente était acceptée, à condition de nommer le document en défaut et le point précis du désaccord – ici l'angle, et lui seul : la distance à l'origine, elle, est correcte dans les deux documents, puisque $|z'_B| = |z_A| = 4$.

Exercice 2 : La puissance d'un radiateur alimenté en alternatif

8 points

1) La formule de duplication donne $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$. En y remplaçant $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$:

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1.$$

On isole $\cos^2\theta$:

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos(2\theta) \iff \boxed{\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}.$$

Contrôle : pour $\theta = 0$, à gauche 1, à droite $\frac{1+1}{2} = 1$.

- 2) $p(t) = R(i(t))^2 = 25 \times (4 \cos(100\pi t))^2 = 25 \times 16 \cos^2(100\pi t) = 400 \cos^2(100\pi t)$.
On applique la question 1 avec $\theta = 100\pi t$, donc $2\theta = 200\pi t$:

$$p(t) = 400 \times \frac{1 + \cos(200\pi t)}{2} = \boxed{200 + 200 \cos(200\pi t)}.$$

- 3) Le cosinus varie entre -1 et 1 , donc p varie entre $200 - 200 = 0$ et $200 + 200 = 400$.

Maximum $\boxed{400 \text{ W}}$, atteint quand $\cos(200\pi t) = 1$, c'est-à-dire $200\pi t = 2k\pi$, soit $t = \frac{k}{100}$: sur $[0; 0,02]$, aux instants $t = 0$, $t = 0,01$ et $t = 0,02$ seconde.

Minimum $\boxed{0 \text{ W}}$, atteint quand $\cos(200\pi t) = -1$, c'est-à-dire $200\pi t = \pi + 2k\pi$, soit $t = 0,005 + \frac{k}{100}$: sur $[0; 0,02]$, aux instants $t = 0,005$ et $t = 0,015$ seconde.

La puissance s'annule donc bel et bien, mais seulement à des instants isolés – ceux où le courant change de sens et passe par zéro.

- 4) La fonction $t \mapsto \cos(200\pi t)$ a pour période $\frac{2\pi}{200\pi} = 0,01$, et p s'obtient à partir d'elle en multipliant par 200 puis en ajoutant 200, deux opérations qui ne changent pas la période. Donc p a pour période $0,01 \text{ s}$.

Interprétation : la période de p est la moitié de celle du courant. Pendant une période du courant, la puissance passe donc deux fois par son maximum. C'est cohérent physiquement : le radiateur chauffe autant quand le courant est à $+4 \text{ A}$ que lorsqu'il est à -4 A , puisque la puissance dépend du carré de l'intensité.

- 5) La puissance oscille autour de 200 W . On cherche $I > 0$ telle que $RI^2 = 200$:

$$25 I^2 = 200 \iff I^2 = 8 \iff I = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2} \text{ A}} \approx 2,83 \text{ A}.$$

Remarque : on constate que $2\sqrt{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire l'intensité de crête divisée par $\sqrt{2}$. C'est exactement ce que les électriciens appellent l'intensité efficace – la valeur qu'affiche un ampèremètre branché sur ce circuit.

Exercice 3 : Une aire qui vaut exactement la moitié

6 points

- 1) On repart de $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, mais en remplaçant cette fois $\cos^2 \theta$ par $1 - \sin^2 \theta$:

$$\cos(2\theta) = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \iff \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

Avec $\theta = \pi t$, donc $2\theta = 2\pi t$: $f(t) = \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2}$.

- 2) On écrit $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi t)$ et on primitive terme à terme. Une primitive de $t \mapsto \cos(2\pi t)$ est $t \mapsto \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}$. Donc

$$F(t) = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\pi t)}{4\pi}.$$

Vérification : $F'(t) = \frac{1}{2} - \frac{2\pi \cos(2\pi t)}{4\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi t)}{2} = f(t)$.

- 3) $\int_0^1 f(t) dt = F(1) - F(0)$. Or $\sin(2\pi) = 0$ et $\sin(0) = 0$, donc les deux termes en sinus dispa-

raissent :

$$\int_0^1 f(t) dt = \left(\frac{1}{2} - 0 \right) - (0 - 0) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

- 4) La fonction f est positive sur $[0 ; 1]$: l'intégrale est donc l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 1$.

Le rectangle tracé en pointillés a pour base 1 et pour hauteur $\frac{1}{2}$: son aire vaut $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, exactement la même. Autrement dit, la bosse déborde du rectangle autant qu'elle lui laisse de place :

ce qui dépasse au-dessus de la droite $y = \frac{1}{2}$, au centre, compense exactement les deux creux laissés en dessous, près de $t = 0$ et de $t = 1$. La figure le rend visible, le calcul le démontre.

- 5) On applique la même primitive, avec $\sin(2\pi \times 0,5) = \sin(\pi) = 0$:

$$\int_0^{0,5} f(t) dt = F(0,5) - F(0) = \left(\frac{0,5}{2} - \frac{\sin(\pi)}{4\pi} \right) - 0 = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

C'est la *moitié* de l'intégrale sur $[0 ; 1]$, ce que la figure laissait prévoir : la courbe est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $t = \frac{1}{2}$, donc les deux moitiés du domaine ont la même aire.