

Calculatrice autorisée (mode examen)

Dans tout le sujet, on note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O .

Exercice 1 : Deux documents qui ne disent pas la même chose

6 points

Sur une chaîne de montage, un bras articulé saisit une pièce au point A et doit la déposer au point B . Le service méthodes et l'atelier ne sont pas d'accord sur ce que fait réellement le bras.

Document 1 – note du service méthodes

« La pièce est saisie au point A d'affixe $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$, puis amenée au point B par une **rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$** . »

Document 2 – relevé de l'atelier

Coordonnées mesurées au comparateur, en centimètres, arrondies à 10^{-2} près :

	abscisse	ordonnée
A	3,46	2,00
B	-3,46	-2,00

- 1) Écrire z_A sous forme algébrique, en valeurs exactes. Vérifier que le relevé de l'atelier est bien compatible avec le document 1 en ce qui concerne le point A .
- 2) D'après le document 1, déterminer la forme exponentielle puis la forme algébrique de l'affixe que devrait avoir le point B . On en donnera aussi une valeur approchée à 10^{-2} près.
- 3) Le relevé de l'atelier est-il compatible avec la note du service méthodes ? Justifier.
- 4) On note $z'_B = -2\sqrt{3} - 2i$ l'affixe réellement relevée. Calculer $\frac{z'_B}{z_A}$, puis en déduire la transformation qui amène effectivement A sur le point relevé.
- 5) Rédiger pour l'atelier une phrase de conclusion indiquant quel document est en défaut et sur quel point précis.

Exercice 2 : La puissance d'un radiateur alimenté en alternatif

8 points

Un radiateur de résistance $R = 25$ ohms est parcouru par un courant alternatif d'intensité

$$i(t) = 4 \cos(100\pi t),$$

où i est exprimée en ampères et t en secondes. La puissance instantanée dissipée, en watts, est donnée par $p(t) = R (i(t))^2$.

- 1) Démontrer que, pour tout réel θ , $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$. On pourra partir de la formule de duplication.
- 2) Exprimer $p(t)$ en fonction de t , puis démontrer, à l'aide de la question 1, que

$$p(t) = 200 + 200 \cos(200\pi t).$$

- 3) En déduire la valeur maximale et la valeur minimale de p , ainsi que des instants où elles sont atteintes sur l'intervalle $[0 ; 0,02]$.

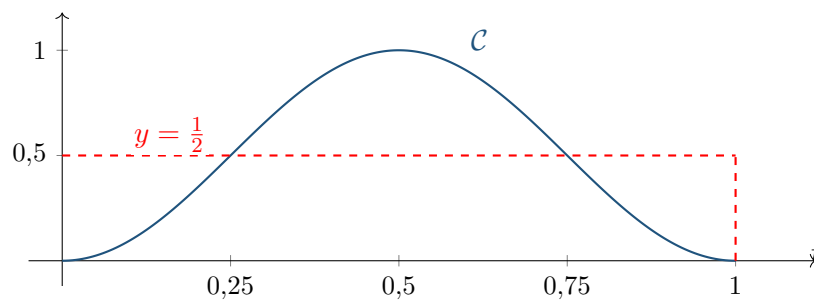
- 4) Le courant i a pour période 0,02 seconde. Montrer que la puissance p , elle, a pour période 0,01 seconde. *Interpréter : combien de fois la puissance passe-t-elle par son maximum pendant une période du courant ?*
- 5) Un radiateur alimenté en continu sous une intensité constante I dissiperait la puissance constante RI^2 . Déterminer l'intensité constante I qui dissiperait la même puissance que la valeur autour de laquelle p oscille. *On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.*

Exercice 3 : Une aire qui vaut exactement la moitié

6 points

Cet exercice réinvestit le chapitre « Intégrales ».

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(t) = \sin^2(\pi t)$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous, ainsi que le rectangle de base $[0 ; 1]$ et de hauteur $\frac{1}{2}$ (en pointillés).



- 1) Démontrer que, pour tout t de $[0 ; 1]$, $f(t) = \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2}$.
- 2) Déterminer une primitive F de f sur $[0 ; 1]$.
- 3) Calculer $\int_0^1 f(t) dt$. *On donnera la valeur exacte.*
- 4) Interpréter ce résultat comme une aire, et expliquer en quoi il est cohérent avec le rectangle tracé en pointillés sur la figure.
- 5) Calculer $\int_0^{0,5} f(t) dt$ et commenter le résultat obtenu au regard de l'allure de la courbe.