

Exercice 1 : Rotations, racines et duplication

8 points

1) **Module.** $|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4.$

Argument. On factorise par le module :

$$z = 4 \left(\frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{4}i \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right).$$

On cherche donc θ tel que $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{1}{2}$: le cosinus est positif et le sinus négatif, donc θ est dans le quatrième quadrant, et $\theta = -\frac{\pi}{6}$. D'où

$$z = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

2) **Réponse c.** On compare les deux affixes :

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{3e^{i\frac{3\pi}{4}}}{3e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{donc} \quad z_B = e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_A.$$

Multiplier par un nombre complexe de *module* 1 et d'argument α , c'est faire tourner autour de l'origine d'un angle α : B est donc l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Pourquoi les autres sont fausses : une homothétie de rapport 3 multiplierait le module par 3, or les deux points ont le même module 3 ; une translation d'affixe 3 donnerait $z_B = z_A + 3$, ce qui ne conserverait pas le module ; une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ amènerait A sur le point d'argument $\frac{\pi}{2}$, pas $\frac{3\pi}{4}$.

3) $z^2 = -25$ s'écrit $z^2 - (5i)^2 = 0$, soit $(z - 5i)(z + 5i) = 0$. Les solutions sont donc $\mathcal{S} = \{5i ; -5i\}$.

Formes exponentielles : $5i$ a pour module 5 et pour argument $\frac{\pi}{2}$, tandis que $-5i$ a pour module 5 et pour argument $-\frac{\pi}{2}$:

$$5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad -5i = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

4) On part de la formule de duplication, elle-même issue de la formule d'addition appliquée à $\theta + \theta$:

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.$$

L'identité $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ donne $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$. En reportant :

$$\cos(2\theta) = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta.$$

Contrôle : pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le membre de gauche vaut $\cos \pi = -1$, et celui de droite $1 - 2 \times 1^2 = -1$. Les deux coïncident.

Exercice 2 : Deux courants qui se superposent

8 points

1) $i(0) = 3 \cos(0) + 4 \sin(0) = 3 \times 1 + 4 \times 0 = 3 \text{ A}.$

Pour $t = 0,005$: $100\pi \times 0,005 = 0,5\pi = \frac{\pi}{2}$, donc

$$i(0,005) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times 0 + 4 \times 1 = 4 \text{ A}.$$

2) La formule d'addition donne

$$\begin{aligned} A \cos(100\pi t + \varphi) &= A [\cos(100\pi t) \cos \varphi - \sin(100\pi t) \sin \varphi] \\ &= (A \cos \varphi) \cos(100\pi t) + (-A \sin \varphi) \sin(100\pi t). \end{aligned}$$

Cette expression doit coïncider avec $3 \cos(100\pi t) + 4 \sin(100\pi t)$ pour *tout* réel t . En identifiant les coefficients de $\cos(100\pi t)$ et de $\sin(100\pi t)$:

$$A \cos \varphi = 3 \quad \text{et} \quad -A \sin \varphi = 4, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{A \sin \varphi = -4}.$$

Pourquoi l'identification est légitime : si deux expressions de la forme $\alpha \cos(100\pi t) + \beta \sin(100\pi t)$ sont égales pour tout t , il suffit de prendre $t = 0$ pour obtenir l'égalité des coefficients de $\cos$, puis $t = 0,005$ pour celle des coefficients de $\sin$.

3) On élève les deux égalités au carré et on les additionne :

$$(A \cos \varphi)^2 + (A \sin \varphi)^2 = 3^2 + (-4)^2 \iff A^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} = 25 \iff A^2 = 25.$$

Comme $A > 0$, on obtient $\boxed{A = 5 \text{ A}}$: l'intensité de crête vaut 5 ampères.

On remarque qu'elle est *inférieure* à la somme $3 + 4 = 7$ des deux crêtes : les deux bobinages ne sont pas en phase, leurs maximums ne se produisent pas au même instant.

4) On reporte $A = 5$:

$$\cos \varphi = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{-4}{5} = -0,8.$$

Le cosinus est positif et le sinus négatif : φ appartient au quatrième quadrant, donc $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$.

La calculatrice donne $\arccos(0,6) \approx 0,9273$; comme le sinus doit être négatif, on retient l'opposé :

$$\boxed{\varphi \approx -0,93 \text{ rad}}.$$

Conclusion : $i(t) \approx 5 \cos(100\pi t - 0,93)$.

5) Avec $100\pi \times 0,005 = \frac{\pi}{2}$:

$$5 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 5 \left[\cos \frac{\pi}{2} \cos \varphi - \sin \frac{\pi}{2} \sin \varphi \right] = 5 [0 \times 0,6 - 1 \times (-0,8)] = 5 \times 0,8 = \boxed{4 \text{ A}}.$$

C'est exactement la valeur de $i(0,005)$ trouvée à la question 1. On vérifie ainsi que **les deux écritures de i décrivent bien le même courant** : la forme $3 \cos + 4 \sin$ et la forme $5 \cos(100\pi t - 0,93)$ ne sont que deux manières d'écrire la même fonction, la seconde faisant apparaître directement l'intensité de crête et le déphasage.

Exercice 3 : Un argument mal choisi

4 points

1) **Oui.** $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Le module est correct : l'erreur n'est pas là.

2) $2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \boxed{2 - 2i}$.

On cherchait l'écriture de $-2 + 2i$. L'élève a donc écrit la forme exponentielle d'un *autre* nombre – en fait l'opposé de celui qu'on lui demandait. Sa réponse est fausse.

3) L'erreur est au moment où il écrit « $\tan \theta = -1$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ».

La fonction tangente est périodique de période π : l'équation $\tan \theta = -1$ admet deux solutions dans un tour complet, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$. La tangente ne distingue pas un point de son symé-

trique par rapport à l'origine, donc elle ne permet jamais à elle seule de choisir le quadrant. Ici $z = -2 + 2i$ a une partie réelle *négative* et une partie imaginaire *positive* : il est dans le deuxième quadrant, celui de $\frac{3\pi}{4}$ – et l'élève a retenu l'autre.

4) On factorise par le module :

$$z = 2\sqrt{2} \left(\frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}} i \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right).$$

On cherche donc θ tel que $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$: les deux conditions ensemble ne laissent qu'une possibilité, $\theta = \frac{3\pi}{4}$. D'où

$$z = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

À retenir : on détermine toujours un argument par le *couple* $(\cos \theta ; \sin \theta)$, jamais par la seule tangente.