

Calculatrice autorisée (mode examen)

Dans tout le sujet, on note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O .

Exercice 1 : Rotations, racines et duplication

8 points

- 1) Écrire le nombre complexe $z = 2\sqrt{3} - 2i$ sous forme exponentielle, en détaillant les étapes de calcul.
- 2) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Parmi les quatre propositions suivantes, une seule est exacte. **Indiquer la lettre de la réponse exacte en expliquant votre choix.**
Le point B est l'image du point A par...
 - a) l'homothétie de centre O et de rapport 3
 - b) la translation de vecteur d'affixe 3
 - c) la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 - d) la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -25$, puis donner la forme exponentielle de chacune des solutions.
- 4) Démontrer que, pour tout réel θ , $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2 \theta$.

Exercice 2 : Deux courants qui se superposent

8 points

Dans un enroulement de moteur, deux bobinages débitent simultanément. L'intensité totale qui traverse l'enroulement, en ampères, à l'instant t exprimé en secondes, est

$$i(t) = 3\cos(100\pi t) + 4\sin(100\pi t).$$

Le constructeur préfère décrire ce courant sous la forme $i(t) = A\cos(100\pi t + \varphi)$, où $A > 0$ est l'intensité de crête et φ le déphasage.

- 1) Calculer $i(0)$, puis $i(0,005)$. On donnera des valeurs exactes.
- 2) On admet qu'il existe un réel $A > 0$ et un réel φ tels que $i(t) = A\cos(100\pi t + \varphi)$ pour tout t . En développant $A\cos(100\pi t + \varphi)$ à l'aide de la formule d'addition, démontrer que

$$A\cos\varphi = 3 \quad \text{et} \quad A\sin\varphi = -4.$$

- 3) En déduire la valeur de A .
- 4) Déterminer une valeur de φ , arrondie à 10^{-2} près. On précisera dans quel quadrant se situe φ avant de conclure.
- 5) Calculer $A\cos(100\pi \times 0,005 + \varphi)$ et comparer le résultat à la valeur de $i(0,005)$ obtenue à la question 1. Que vérifie-t-on ainsi?

Exercice 3 : Un argument mal choisi

4 points

On demande d'écrire le nombre complexe $z = -2 + 2i$ sous forme exponentielle. Voici la copie rendue par un élève.

Le module est $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Pour l'argument, je calcule $\tan \theta = \frac{2}{-2} = -1$, donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Conclusion : $z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

- 1) Le module calculé par l'élève est-il correct ?
- 2) Écrire $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique. Que peut-on en conclure sur la réponse de l'élève ?
- 3) Expliquer précisément à quel endroit le raisonnement de l'élève cesse d'être valable.
- 4) Donner la forme exponentielle correcte de z , en justifiant par le cosinus et le sinus de l'argument.