

Exercice 1 : Quatre affirmations

5 points

- 1) **Vraie.** Par définition, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, donc

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1.$$

C'est la raison pour laquelle $e^{i\theta}$ décrit exactement le cercle de centre O et de rayon 1 quand θ parcourt $\mathbb{R}$: le module ne change jamais, seul l'argument tourne.

- 2) **Vraie.** $3e^{i\pi} = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3(-1 + i \times 0) = -3$.

La partie imaginaire est nulle : c'est bien un réel. Plus généralement, un nombre $r e^{i\theta}$ est réel exactement lorsque $\sin \theta = 0$, c'est-à-dire lorsque θ est un multiple de π .

- 3) **Fausse.** Le signe de l'argument a été perdu :

$$4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2\sqrt{3}i.$$

La partie imaginaire vaut donc $-2\sqrt{3}$ et non $2\sqrt{3}$.

Le piège : $\cos$ est une fonction paire, $\sin$ est impaire. Changer θ en $-\theta$ laisse la partie réelle intacte et change le signe de la partie imaginaire — c'est exactement le passage au conjugué.

- 4) **Fausse.** La propriété de l'exponentielle porte sur le produit, pas sur la somme : $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$. Contre-exemple avec $\theta = \theta' = 0$: le membre de gauche vaut $e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2$, le membre de droite vaut $e^0 = 1$. Or $2 \neq 1$.

Une seule valeur suffit à réfuter une affirmation annoncée « pour tous réels ».

Exercice 2 : Passer d'une forme à l'autre

7 points

- 1) **Module.** $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

Argument. On cherche θ tel que

$$\cos \theta = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le cosinus est négatif et le sinus positif : θ est dans le deuxième quadrant, et les deux valeurs conduisent à $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Donc

$$z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Attention. Il faut les deux égalités. Le cosinus seul laisserait le choix entre $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

- 2) $z_2 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, soit

$$z_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i = \frac{5\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

- 3) Les modules se multiplient, les arguments s'ajoutent :

$$z_1 z_2 = 2 \times 5 \times e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12},$$

donc $z_1 z_2 = 10e^{i\frac{5\pi}{12}}.$

Pour le quotient, les modules se divisent et les arguments se soustraient :

$$\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}, \quad \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{5} e^{i\frac{11\pi}{12}}}.$$

4) On isole z :

$$(2+i)z - 3 = 1 + 4i \iff (2+i)z = 4 + 4i \iff z = \frac{4 + 4i}{2 + i}.$$

On multiplie haut et bas par le conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{(4 + 4i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{8 - 4i + 8i - 4i^2}{4 + 1} = \frac{8 + 4 + 4i}{5} = \boxed{\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i}.$$

Vérification : $(2+i)\left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right) = \frac{24}{5} + \frac{8}{5}i + \frac{12}{5}i + \frac{4}{5}i^2 = \frac{24-4}{5} + \frac{20}{5}i = 4 + 4i$, et $4 + 4i - 3 = 1 + 4i$.

5) $z^2 = -16$. Comme $-16 = 16i^2$, l'équation s'écrit $z^2 - (4i)^2 = 0$, soit $(z - 4i)(z + 4i) = 0$. D'où

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4i; -4i\}}.$$

Attention. Dans $\mathbb{R}$ cette équation n'avait aucune solution; dans $\mathbb{C}$ elle en a deux, opposées l'une de l'autre.

Exercice 3 : Une valeur exacte à conquérir

4 points

Deux démarches complètes sont données; une seule était attendue.

Première méthode – par les formules d'addition. L'indication invite à décomposer $\frac{\pi}{12}$ avec deux angles remarquables :

$$\frac{\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

La formule d'addition $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ donne alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}.$$

Seconde méthode – par les nombres complexes. On pose $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ et on calcule ce quotient de deux façons.

Sous forme exponentielle. $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$; $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$ et $\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$.
Donc

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad \text{donc} \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Sous forme algébrique.

$$z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i+\sqrt{3}i-i^2}{3+1} = \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i}{4},$$

$$\text{d'où } \operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}.$$

En identifiant les deux parties réelles :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \iff \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}.$$

Contrôle numérique : $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0,9659$, et la calculatrice donne $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0,9659$. Les deux méthodes concordent.

Exercice 4 : Un script qui cherche une forme exponentielle

4 points

- 1) Avec $a = -1$ et $b = \sqrt{3}$:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \text{theta} = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Comme $b = \sqrt{3} > 0$, le test `if b < 0` est faux et l'argument n'est pas modifié. Le script renvoie donc $\left(2; \frac{2\pi}{3}\right)$ — c'est exactement la forme exponentielle de z_1 trouvée à l'exercice 2.

- 2) `acos` ne renvoie que des valeurs entre 0 et π , c'est-à-dire des angles de *sinus positif ou nul* : le script ne saurait jamais désigner, seul, un point situé *sous* l'axe des abscisses.

Or le signe de b est précisément celui du sinus de l'argument. Le test `rétablit le bon demi-plan` : quand $b < 0$, l'argument cherché est l'opposé de celui que donne `acos`.

Exemple : pour $a = -1$ et $b = -\sqrt{3}$, `acos` renvoie encore $\frac{2\pi}{3}$, et le test corrige en $-\frac{2\pi}{3}$ — ce qui est juste.

- 3) L'appel `forme_exponentielle(0, 0)` donne $r = 0$, puis la ligne `acos(a / r)` tente de calculer $\frac{0}{0}$: Python interrompt l'exécution sur une `division par zéro`.

Mathématiquement, ce cas devait être écarté dès l'énoncé : le nombre complexe 0 a bien un module, qui vaut 0, mais il `n'a aucun argument`. Tous les points du cercle conviendraient, donc aucun ne se distingue — c'est pourquoi la forme exponentielle $r e^{i\theta}$ est réservée aux nombres *non nuls*, avec $r > 0$.

- 4) Avec $a = 0$ et $b = 5$: $r = \sqrt{0 + 25} = 5$ et $\text{theta} = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$; comme $b > 0$, rien n'est modifié. Le script renvoie $\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$.

Sans le script : le nombre est $5i$. Son module est 5, et il est placé sur l'axe des ordonnées, au-dessus de l'origine : son argument est $\frac{\pi}{2}$. On retrouve $5i = 5 e^{i\frac{\pi}{2}}$.