

Calculatrice autorisée (mode examen)

Dans tout le sujet, on note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Toutes les valeurs demandées sont des **valeurs exactes**.

Exercice 1 : Quatre affirmations

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. **Toute réponse doit être justifiée** : un calcul, une propriété du cours ou un contre-exemple.

- 1) Pour tout réel θ , $|e^{i\theta}| = 1$.
- 2) Le nombre complexe $3e^{i\pi}$ est un nombre réel.
- 3) Le nombre complexe $4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ a pour partie imaginaire $2\sqrt{3}$.
- 4) Pour tous réels θ et θ' , on a $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

Exercice 2 : Passer d'une forme à l'autre

7 points

Chaque question peut être traitée séparément.

- 1) Écrire le nombre complexe $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle, en détaillant les étapes du calcul.
- 2) Écrire le nombre complexe $z_2 = 5e^{-i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique.
- 3) Donner la forme exponentielle de $z_1 z_2$, puis celle de $\frac{z_1}{z_2}$. On utilisera les résultats des questions 1 et 2 sans les redémontrer.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2 + i)z - 3 = 1 + 4i$.
- 5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -16$.

Exercice 3 : Une valeur exacte à conquérir

4 points

Aucune méthode n'est imposée, et aucune étape n'est indiquée : la démarche fait partie de ce qui est évalué.

Démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Indication matérielle : $\frac{\pi}{12}$ ne figure pas dans le tableau des valeurs remarquables, mais $\frac{\pi}{12}$ s'obtient à partir de deux angles qui y figurent.

Exercice 4 : Un script qui cherche une forme exponentielle

4 points

Le script Python ci-dessous reçoit la partie réelle a et la partie imaginaire b d'un nombre complexe non nul, et renvoie son module ainsi qu'un argument en radians.

```
from math import sqrt, acos

def forme_exponentielle(a, b) :
    r = sqrt(a**2 + b**2)
    theta = acos(a / r)
    if b < 0 :
        theta = -theta
    return r, theta
```

- 1) Quel couple le script renvoie-t-il pour l'appel `forme_exponentielle(-1, sqrt(3))` ? On donnera l'argument sous forme d'une fraction de π .
- 2) La fonction `acos` de Python renvoie toujours un nombre compris entre 0 et π . Expliquer à quoi sert le test `if b < 0`.
- 3) Que se passe-t-il si l'on appelle `forme_exponentielle(0, 0)` ? Expliquer pourquoi ce cas devait de toute façon être exclu.
- 4) Quel couple le script renvoie-t-il pour l'appel `forme_exponentielle(0, 5)` ? Retrouver ce résultat sans utiliser le script.