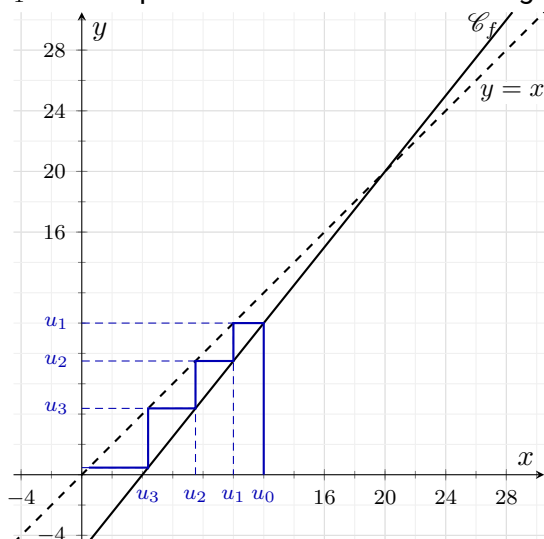


Exercice 1

11,5 points

- 1) On part de $u_0 = 12$ sur l'axe des abscisses. On monte jusqu'à $\mathcal{C}_f$: l'ordonnée obtenue est $f(u_0) = u_1$. On la reporte sur l'axe des abscisses grâce à la droite $y = x$, et l'on recommence.



On lit $u_1 = 10$, $u_2 = 7,5$, $u_3 \approx 4,4$, $u_4 \approx 0,5$.

Les termes se déplacent vers la gauche : on peut conjecturer que la suite (u_n) est **décroissante**.

Les termes s'éloignent du point d'intersection des deux droites, d'abscisse 20 (solution de $1,25x - 5 = x$).

- 2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_{n+1} < u_n \leq 12$ ».

Initialisation. $u_0 = 12$ et $u_1 = 1,25 \times 12 - 5 = 10$. On a bien $u_1 < u_0 \leq 12$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} < u_n \leq 12 \\ \Leftrightarrow & 1,25 u_{n+1} < 1,25 u_n \leq 15 && \text{(on multiplie par } 1,25 > 0, \text{ l'ordre est conservé)} \\ \Leftrightarrow & 1,25 u_{n+1} - 5 < 1,25 u_n - 5 \leq 10 && \text{(on retranche 5)} \\ \Leftrightarrow & u_{n+2} < u_{n+1} \leq 10 \\ \Rightarrow & u_{n+2} < u_{n+1} \leq 12 && \text{(car } 10 \leq 12) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$u_{n+1} < u_n \leq 12 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- b. Pour tout n , $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

Pour tout n , $u_n \leq 12$: la suite est **majorée par 12** (c'est aussi son premier terme, ce qui est cohérent avec la décroissance).

- 3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 1,25 u_n - 5 - 20 = 1,25 u_n - 25 = 1,25 (u_n - 20) = 1,25 w_n.$$

La suite (w_n) est donc **géométrique de raison $q = 1,25$** , de premier terme $w_0 = u_0 - 20 = 12 - 20 = -8$.

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n$, soit **$w_n = -8 \times 1,25^n$** .

Comme $u_n = w_n + 20$: **$u_n = 20 - 8 \times 1,25^n$** .

Vérification : $u_0 = 20 - 8 = 12$ et $u_1 = 20 - 8 \times 1,25 = 10$.

4) a. On sépare la somme en deux :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (20 - 8 \times 1,25^k) = 20(n+1) - 8 \sum_{k=0}^n 1,25^k.$$

La seconde somme est celle des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $1,25 \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n 1,25^k = \frac{1 - 1,25^{n+1}}{1 - 1,25} = \frac{1,25^{n+1} - 1}{0,25} = 4(1,25^{n+1} - 1).$$

D'où $S_n = 20(n+1) - 32(1,25^{n+1} - 1)$.

Vérification : $S_0 = 20 - 32 \times 0,25 = 12 = u_0$ et $S_1 = 40 - 32 \times 0,5625 = 22 = u_0 + u_1$.

b. À chaque passage dans la boucle, on calcule le terme suivant puis on l'ajoute à la somme :

```

1  def somme(n):
2      u = 12
3      s = 12
4      for k in range(n):
5          u = 1.25*u - 5
6          s = s + u
7      return s

```

La variable s part de $u_0 = 12$ et reçoit $u_1, \dots, u_n$: elle vaut bien S_n à la fin.

`somme(10)` renvoie $S_{10} = 220 - 32(1,25^{11} - 1) \approx -120,529$.

Exercice 2

8,5 points

1) $a_1 = 2a_0 + 0 - 5 = 10 - 5 = 5$; $a_2 = 2a_1 + 1 - 5 = 10 - 4 = 6$; $a_3 = 2a_2 + 2 - 5 = 12 - 3 = 9$.

2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $a_n \geq 5$ ».

Initialisation. $a_0 = 5 \geq 5$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
 & a_n \geq 5 \\
 \iff & 2a_n \geq 10 && \text{(on multiplie par 2 > 0)} \\
 \iff & 2a_n + n - 5 \geq n + 5 && \text{(on ajoute } n - 5) \\
 \iff & a_{n+1} \geq n + 5 \\
 \implies & a_{n+1} \geq 5 && \text{(car } n \geq 0)
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $a_n \geq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n + n - 5 - a_n = a_n + n - 5.$$

Or $a_n \geq 5$ d'après la question précédente, et $n \geq 0$, donc $a_n + n - 5 \geq 0$.

Ainsi $a_{n+1} \geq a_n$: la suite (a_n) est croissante.

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = a_{n+1} + (n+1) - 4 = 2a_n + n - 5 + n - 3 = 2a_n + 2n - 8 = 2(a_n + n - 4) = 2v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 2, de premier terme $v_0 = a_0 + 0 - 4 = \boxed{1}$.

b. Pour tout n , $v_n = 1 \times 2^n = 2^n$. Comme $a_n = v_n - n + 4$, on obtient $a_n = 2^n - n + 4$.

Vérification : $a_3 = 8 - 3 + 4 = 9$, conforme à la question 1).

4) La suite (a_n) est croissante : dès qu'un terme dépasse 1 200, tous les suivants le dépassent aussi. On calcule les termes à l'aide de $a_n = 2^n - n + 4$:

n	8	9	10	11
a_n	252	507	1 018	2 041

$a_{10} = 1\,018 \leq 1\,200$ et $a_{11} = 2\,041 > 1\,200$. Le premier terme strictement supérieur à 1 200 est donc a_{11} , d'indice 11.