

Calculatrice autorisée

Exercice 1

11,5 points

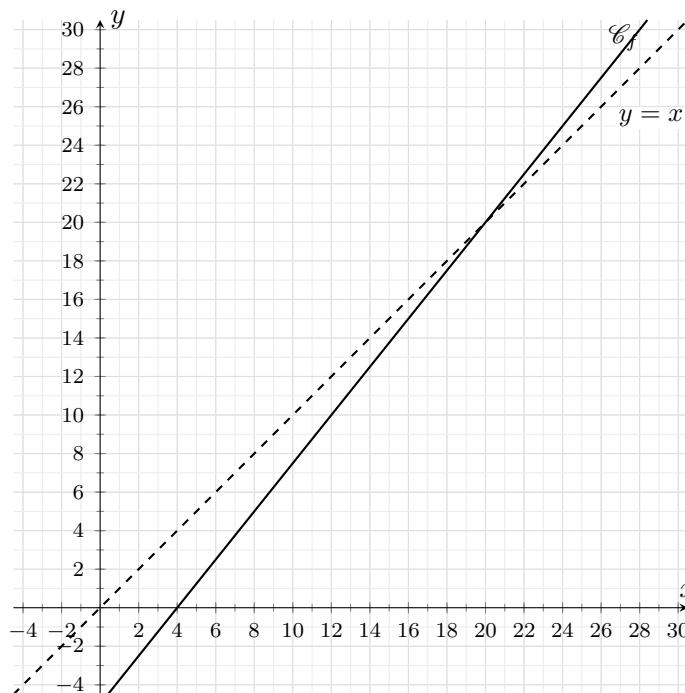
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 1,25 u_n - 5.$$

- 1) Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a représenté la droite d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction

$$f(x) = 1,25x - 5.$$

Représenter graphiquement les premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer quant aux variations de cette suite ?



- 2) a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} < u_n \leq 12.$$

- b. En déduire les variations de la suite (u_n) et donner un majorant de cette suite.

- 3) Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = u_n - 20$.

- a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme w_0 .

- b. En déduire l'expression de w_n , puis celle de u_n , en fonction de n .
- 4) a. Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ en fonction de n .
b. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

```

1 def somme(n):
2     u = 12
3     s = 12
4     for k in range(n):
5         u = .....
6         s = .....
7     return s

```

Compléter les lignes 5 et 6 pour que `somme(n)` renvoie S_n . Quelle valeur retourne l'algorithme lorsque l'on exécute `somme(10)`? Arrondir à 10^{-3} près.

Exercice 2

8,5 points

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = 2a_n + n - 5.$$

- 1) Calculer a_1 , a_2 et a_3 .
- 2) a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $a_n \geq 5$.
b. En déduire les variations de la suite (a_n) .
- 3) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = a_n + n - 4$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0 .
b. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$a_n = 2^n - n + 4.$$

- 4) En utilisant une méthode par balayage, déterminer l'indice du premier terme de la suite (a_n) strictement supérieur à 1 200. Justifier la réponse.