

## Exercice 1 : Vrai ou faux

6 points

- 1) **Vraie.** Les solutions sont les fonctions  $x \mapsto k e^{ax}$ , où

$k$  prend n'importe quelle valeur réelle

Il y en a donc une infinité. C'est précisément pourquoi une *condition initiale* est nécessaire pour en désigner une.

- 2) **Vraie.** Si  $f' = 3f$  et  $g' = 3g$ , alors

$$(f + g)' = f' + g' = 3f + 3g = 3(f + g),$$

donc  $f + g$  est solution de  $y' = 3y$ .

Cette propriété vaut pour l'équation *homogène*  $y' = ay$ ; elle tombe en défaut dès qu'il y a un second membre – voir l'affirmation 4.

- 3) **Vraie.** C'est le résultat d'unicité admis en cours :

une condition initiale détermine une seule solution

Concrètement,  $y(x_0)$  fixe la valeur de  $k$ , et une seule.

- 4) **Fausse.** Si  $y = 0$  alors  $y' = 0$ , mais

$$2y + 5 = 2 \times 0 + 5 = 5 \neq 0.$$

La fonction nulle n'est pas solution.

Elle est solution de toute équation *homogène*  $y' = ay$ , mais jamais d'une équation avec un second membre non nul – c'est exactement la limite de l'affirmation 2.

## Exercice 2 : La température d'une serre

14 points

### Partie A – Résoudre

- 1) En développant :  $T' = -0,4(T - 5) = -0,4T + 0,4 \times 5$ , soit

$$T' = -0,4T + 2.$$

- 2) Une solution constante  $T = c$  a une dérivée nulle :  $0 = -0,4c + 2$ , donc  $c = \frac{2}{0,4} = \boxed{5}$ .

Physiquement, c'est la température extérieure : si la serre est déjà à 5 °C, elle n'évolue plus. C'est l'état d'équilibre du système.

- 3) Les solutions de  $T' = -0,4T + 2$  sont les fonctions

$$T(t) = k e^{-0,4t} + 5, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La condition  $T(0) = 20$  donne  $k + 5 = 20$ , soit  $k = 15$ , d'où

$$T(t) = 5 + 15 e^{-0,4t}.$$

### Partie B – Exploiter

- 4) À 22 heures,  $t = 2$  :  $T(2) = 5 + 15 e^{-0,8} \approx \boxed{11,7 \text{ °C}}$ .

À 23 heures,  $t = 3$  :  $T(3) = 5 + 15 e^{-1,2} \approx \boxed{9,5 \text{ °C}}$ .

- 5)  $T'(t) = -6 e^{-0,4t}$ . L'exponentielle étant strictement positive,  $T'(t) < 0$  : la température est strictement décroissante.

C'est cohérent : la serre, plus chaude que l'extérieur, se refroidit sans jamais se réchauffer d'elle-

même.

6) On résout  $5 + 15e^{-0,4t} = 8$  :

$$15e^{-0,4t} = 3 \iff e^{-0,4t} = \frac{1}{5} \iff -0,4t = -\ln(5) \iff t = \frac{\ln(5)}{0,4} \approx 4,024 \text{ h.}$$

Soit 4 heures et  $0,024 \times 60 \approx 1$  minute : le chauffage devra être relancé à **0 h 01**, juste après minuit.

### Partie C – La forme de la décroissance

7) Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-0,4t} \rightarrow 0$ , donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 5 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

La serre tend vers la température extérieure sans jamais l'atteindre – on retrouve la solution constante de la partie A, qui est bien l'état d'équilibre.

8) **Question ouverte.** Avec le coefficient  $k$ , la même résolution donne  $T(t) = 5 + 15e^{-kt}$  (la température initiale et l'extérieure n'ayant pas changé). On cherche  $t$  tel que  $T(t) = 8$  :

$$15e^{-kt} = 3 \iff e^{-kt} = \frac{1}{5} \iff -kt = -\ln(5) \iff t = \frac{\ln(5)}{k}.$$

Vérification : avec  $k = 0,4$  on retrouve  $\frac{\ln 5}{0,4} \approx 4,02 \text{ h.}$

**Ce que gagne le maraîcher.** La durée est *inversement proportionnelle* à  $k$  : diviser  $k$  par deux double le temps avant le gel. Par exemple :

| $k$              | 0,4    | 0,3    | 0,2    |
|------------------|--------|--------|--------|
| durée avant 8 °C | 4,02 h | 5,36 h | 8,05 h |

Isoler la serre ne change ni la température de départ ni celle d'équilibre : cela ne modifie que la *vitesse* à laquelle on passe de l'une à l'autre. Avec  $k = 0,2$ , le chauffage ne repartirait qu'à 4 heures du matin au lieu de minuit – quatre heures de chauffage économisées chaque nuit.