

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Vrai ou faux

6 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. **Toute réponse doit être justifiée** : un calcul, une propriété du cours, ou un contre-exemple.

- 1) L'équation différentielle $y' = ay$ admet une infinité de solutions.
- 2) Si f et g sont solutions de $y' = 3y$, alors $f + g$ l'est aussi.
- 3) Une équation différentielle $y' = ay + b$ admet au plus une solution vérifiant une condition initiale donnée.
- 4) La fonction nulle est solution de $y' = 2y + 5$.

Exercice 2 : La température d'une serre

14 points

Cet exercice mobilise le chapitre « Fonction exponentielle » dans sa partie C.

Une serre maraîchère est chauffée la nuit. À 20 heures, le chauffage est coupé : la température intérieure vaut alors 20 °C, et la température extérieure, supposée constante, vaut 5 °C.

On note $T(t)$ la température intérieure, en degrés Celsius, t heures après la coupure. La loi de refroidissement conduit à l'équation différentielle

$$T' = -0,4(T - 5), \quad T(0) = 20.$$

Partie A – Résoudre (5 points)

- 1) Montrer que cette équation s'écrit $T' = -0,4T + 2$.
- 2) Déterminer la solution constante de cette équation. Que représente-t-elle physiquement ?
- 3) Donner l'ensemble des solutions, puis déterminer celle qui vérifie $T(0) = 20$.

Partie B – Exploiter (5 points)

On admet désormais que $T(t) = 5 + 15e^{-0,4t}$.

- 4) Calculer la température à 22 heures, puis à 23 heures. On arrondira à 10^{-1} près.
- 5) Calculer $T'(t)$ et vérifier son signe. Interpréter.
- 6) Les cultures gèlent en dessous de 8 °C. Déterminer, par le calcul, à quelle heure le chauffage devra être relancé. On donnera la valeur exacte, puis l'heure arrondie à la minute.

Partie C – La forme de la décroissance (4 points)

- 7) Déterminer la limite de $T(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, et l'interpréter.
- 8) *Question ouverte.* Le maraîcher envisage d'isoler la serre, ce qui remplacerait le coefficient 0,4 par un coefficient k plus petit, la température initiale et la température extérieure restant les mêmes.
Déterminer, en fonction de k , l'instant où la température atteint 8 °C, et dire ce que gagne le maraîcher en diminuant k . Aucune indication n'est donnée : la démarche fait partie de l'évaluation.