

Exercice 1 : Deux fiches de montage

6 points

- 1) Avec $RC = 1$ et $E = 12$:

$$u' = -\frac{1}{1}u + \frac{12}{1}, \quad \text{soit} \quad \boxed{u' = -u + 12} \quad (a = -1, b = 12).$$

- 2) $u(0) = 12(1 - e^0) = 12(1 - 1) = \boxed{0}$: la condition initiale est bien vérifiée. Le condensateur est déchargé à l'instant où l'on ferme le circuit.

- 3) $u(1) = 12(1 - e^{-1}) \approx 12 \times 0,632 \approx \boxed{7,59 \text{ V}}$.

Le document 2 n'est pas recevable : au bout d'une seconde la tension n'atteint que 7,59 V, soit à peine 63 % des 12 V annoncés.

- 4) La durée RC n'est pas le temps de charge complète, mais le temps au bout duquel la tension atteint environ 63 % de sa valeur finale :

$$\frac{u(1)}{12} = 1 - e^{-1} \approx 0,632.$$

RC est la constante de temps du circuit, pas sa durée de charge. On retient en pratique qu'il faut environ 5 RC pour considérer la charge comme terminée – ici 5 secondes, et non 1.

- 5) Une note correcte serait par exemple :

« La constante de temps RC vaut 1 seconde : au bout d'une seconde, le condensateur n'est chargé qu'à 63 %, soit environ 7,6 V. Il faut compter environ 5 secondes pour atteindre pratiquement les 12 V. La temporisation doit être calculée à partir du seuil de déclenchement visé, et non du seul produit RC . »

Exercice 2 : La charge du condensateur

8 points

- 1) $u(t) = 12 - 12e^{-t}$, donc $u'(t) = 12e^{-t}$. Par ailleurs

$$-u + 12 = -12 + 12e^{-t} + 12 = 12e^{-t}.$$

Les deux expressions coïncident : u est bien solution de $u' = -u + 12$.

- 2) $u'(t) = 12e^{-t}$. L'exponentielle étant strictement positive, $u'(t) > 0$ pour tout t : u est strictement croissante.

Interprétation : la tension aux bornes du condensateur ne fait que monter pendant la charge – elle ne redescend jamais.

- 3) Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-t} \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 12 \text{ V}.$$

Physiquement : la tension du condensateur tend vers celle de l'alimentation. Une fois chargé, il n'absorbe plus de courant.

- 4) On résout $12(1 - e^{-t}) = 11$:

$$1 - e^{-t} = \frac{11}{12} \iff e^{-t} = \frac{1}{12} \iff -t = -\ln(12) \iff \boxed{t = \ln(12)} \approx \boxed{2,48 \text{ s}}.$$

Le relais se déclenche donc au bout d'environ 2,5 secondes – deux fois et demie la constante de temps, ce qui confirme l'erreur du document 2.

- 5) **Non.** $u(t) = 12$ exigerait $e^{-t} = 0$, or l'exponentielle est strictement positive : elle ne s'annule jamais. La tension reste donc toujours strictement inférieure à 12 V.

Le modèle décrit une approche *asymptotique* de la tension d'alimentation. En pratique, on considère la charge terminée dès que l'écart devient plus petit que la précision de mesure – c'est une convention, pas un résultat du calcul.

Exercice 3 : La méthode d'Euler

6 points

- 1) Avec $h = 0,5$, le facteur est $1 + h = 1,5$ et il faut deux étapes pour aller de $t = 0$ à $t = 1$:

étape	t	y
départ	0	1
1	0,5	$1 \times 1,5 = 1,5$
2	1	$1,5 \times 1,5 = 2,25$

Le script renvoie donc 2,25.

- 2) Toutes les valeurs – 2,250, 2,488, 2,594, 2,653 – sont inférieures à $e \approx 2,718$.

Quand h diminue, elles se rapprochent de e : l'écart passe de 0,47 à 0,065. On conjecture que la méthode converge vers la solution exacte.

- 3) Sur chaque petit intervalle, Euler remplace la courbe par sa *tangente* au point de départ. Or la fonction exponentielle a une pente qui augmente : sur l'intervalle, la courbe monte *plus vite* que sa tangente de départ.

Le segment passe donc sous la courbe, et l'erreur s'accumule à chaque pas, toujours dans le même sens – d'où une approximation systématiquement trop petite.

- 4) Un pas très petit multiplie le nombre d'itérations : le calcul devient beaucoup plus long.

De plus, chaque étape introduit une minuscule erreur d'arrondi machine; avec des millions de pas, ces erreurs finissent par s'accumuler et peuvent dégrader le résultat au lieu de l'améliorer. Diviser le pas par dix ne divise donc pas l'erreur totale par dix indéfiniment.