

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Deux fiches de montage

6 points

Les deux documents ci-dessous décrivent le même circuit de temporisation. Ils ne donnent pas la même durée.

Document 1 – Fiche technique du circuit

Un condensateur de capacité C se charge à travers une résistance R sous une tension d'alimentation E . La tension à ses bornes vérifie l'équation différentielle

$$u' = -\frac{1}{RC}u + \frac{E}{RC}, \quad u(0) = 0.$$

Valeurs du montage : $R = 10 \text{ k}$, $C = 100 \mu\text{F}$, $E = 12 \text{ V}$, donc $RC = 1 \text{ seconde}$.

Document 2 – Note du monteur

« Le produit RC vaut 1 seconde. Le condensateur sera donc complètement chargé, à 12 volts, au bout d'une seconde. La temporisation durera une seconde. »

- 1) Avec les valeurs du document 1, écrire l'équation différentielle sous la forme $u' = au + b$ en précisant a et b .
- 2) On admet que la solution est $u(t) = 12(1 - e^{-t})$. Vérifier qu'elle satisfait la condition initiale.
- 3) Calculer $u(1)$, arrondi à 10^{-2} près. Le document 2 est-il recevable ?
- 4) Que représente réellement la durée RC ? On le justifiera par un calcul.
- 5) Rédiger la note que le monteur aurait dû écrire.

Exercice 2 : La charge du condensateur

8 points

On reprend le circuit du document 1, de solution $u(t) = 12(1 - e^{-t})$, où u est en volts et t en secondes.

- 1) Vérifier que u est bien solution de $u' = -u + 12$.
- 2) Calculer $u'(t)$ et déterminer son signe. En déduire le sens de variation de u et l'interpréter.
- 3) Déterminer la limite de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter physiquement.
- 4) La temporisation déclenche un relais lorsque la tension atteint 11 volts. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de temps le relais se déclenche. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
- 5) Le condensateur peut-il atteindre exactement 12 volts ? Justifier, et expliquer en une phrase ce que cela dit du modèle.

Exercice 3 : La méthode d'Euler

6 points

On cherche à approcher la fonction solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$ — c'est-à-dire la fonction exponentielle — sans utiliser sa formule.

L'idée d'Euler est de remplacer la courbe par une succession de petits segments : si l'on connaît $y(t)$, alors pour un pas h petit,

$$y(t+h) \approx y(t) + h \times y'(t) = y(t) + h \times y(t) = y(t)(1+h).$$

```
def euler(h) :
    y = 1
    t = 0
    while t < 1 :
        y = y * (1 + h)
        t = t + h
    return y
```

- 1) Pour $h = 0,5$, détailler les deux étapes du calcul et donner la valeur renvoyée.
- 2) Le tableau ci-dessous donne les valeurs renvoyées par le script.

h	0,5	0,2	0,1	0,05
euler(h)	2,250	2,488	2,594	2,653

Sachant que $y(1) = e \approx 2,718$, les approximations sont-elles supérieures ou inférieures à la valeur exacte? Que se passe-t-il quand h diminue?

- 3) Expliquer pourquoi la méthode sous-estime ici, en vous appuyant sur le fait que la fonction exponentielle est *croissante et de pente croissante*.
- 4) Quel inconvénient y a-t-il à prendre h très petit?