

Exercice 1 : QCM

6 points

- 1) **Réponse D.** Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto k e^{ax}$, k réel quelconque. Ici $a = 3$, donc $x \mapsto k e^{3x}$.

Contrôle : si $y = k e^{3x}$ alors $y' = 3k e^{3x} = 3y$.

La proposition **B** ajoute la constante au lieu de la multiplier : elle donnerait $y' = 3 e^{3x} \neq 3y$.

- 2) **Réponse C.** Une solution constante $y = c$ a une dérivée nulle, donc

$$0 = -2c + 6 \iff c = 3.$$

À retenir : pour $y' = ay + b$, la solution constante vaut $-\frac{b}{a}$, et non b . Ici $-\frac{6}{-2} = 3$. La proposition **A** est précisément l'erreur étudiée à l'exercice 2.

- 3) **Réponse A.** $f(x) = 5 e^{-x}$ donne $f'(x) = -5 e^{-x} = -f(x)$, donc f est solution de $y' = -y$.

Le coefficient 5 ne joue aucun rôle : c'est l'exposant qui fixe l'équation, pas le facteur devant. C'est ce qui piège dans les propositions **B** et **C**.

Exercice 2 : La copie d'un élève

6 points

- 1) **Oui, la première ligne est correcte.** Les solutions de l'équation homogène $y' = -2y$ sont bien les fonctions $x \mapsto k e^{-2x}$. L'erreur n'est pas là.

- 2) Avec $y(x) = -5 e^{-2x} + 6$:

$$y'(x) = 10 e^{-2x} \quad \text{et} \quad -2y + 6 = 10 e^{-2x} - 12 + 6 = 10 e^{-2x} - 6.$$

Les deux expressions diffèrent de 6 : la fonction proposée n'est pas solution.

- 3) L'élève a ajouté $b = 6$ comme solution particulière, alors que la bonne constante est

$$-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-2} = 3.$$

Comment la trouver : on cherche une solution constante $y = c$. Sa dérivée est nulle, donc $0 = -2c + 6$, d'où $c = 3$. C'est un réflexe sûr, qui évite d'avoir à retenir la formule.

- 4) Les solutions de $y' = -2y + 6$ sont les fonctions

$$y(x) = k e^{-2x} + 3, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale donne $y(0) = k + 3 = 1$, donc $k = -2$ et

$$y(x) = -2 e^{-2x} + 3.$$

Vérification : $y' = 4 e^{-2x}$ et $-2y + 6 = 4 e^{-2x} - 6 + 6 = 4 e^{-2x}$. Les deux coïncident, et $y(0) = -2 + 3 = 1$.

Exercice 3 : Reconnaître et résoudre

8 points

- 1) $f(x) = 4 e^{5x}$ donne $f'(x) = 20 e^{5x}$. Or $5f(x) = 5 \times 4 e^{5x} = 20 e^{5x}$. Les deux sont égaux, donc f est bien solution de $y' = 5y$.

- 2) Les solutions de $y' = -0,5 y$ sont

$$y(x) = k e^{-0,5x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3) On cherche d'abord la solution constante : $0 = 4c - 8$ donne $c = 2$. Les solutions sont donc

$$y(x) = k e^{4x} + 2.$$

La condition $y(0) = 3$ donne $k + 2 = 3$, soit $k = 1$, d'où

$$y(x) = e^{4x} + 2.$$

4) a. $g(x) = 3x^2$ donne $g'(x) = 6x$, donc

$$2g - x g' = 6x^2 - x \times 6x = 6x^2 - 6x^2 = 0.$$

g est solution. On remarquera que cette équation n'est pas à coefficients constants – le facteur x en fait une équation d'un autre type – et pourtant la vérification se mène exactement de la même façon.

b. $h(x) = \frac{1}{x}$ donne $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc

$$h' + h^2 = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

h est solution. Ici l'équation n'est même pas linéaire, à cause du terme y^2 : aucune des méthodes du chapitre ne permettrait de la résoudre. Mais vérifier qu'une fonction donnée est solution ne demande rien de plus qu'une dérivée et une substitution.