

Exercice 1 : La distance parcourue par un chariot

10 points

Partie A – Le mouvement

- 1) $v(0) = 0$ et $v(6) = 0,6 \times 36 - 0,1 \times 216 = 21,6 - 21,6 = 0$. Donc $v(0) = v(6) = 0$: le chariot part de l'arrêt et s'arrête au bout de 6 secondes. Le modèle décrit un trajet complet, départ et arrivée compris.
- 2) $v(t) = 0,6t^2 - 0,1t^3$, donc $v'(t) = 0,6 \times 2t - 0,1 \times 3t^2 = 1,2t - 0,3t^2$.
En factorisant par $0,3t$: $1,2t - 0,3t^2 = 0,3t(4 - t)$, soit $v'(t) = 0,3t(4 - t)$.
- 3) Sur $[0; 6]$, le facteur $0,3t$ est positif (nul en 0), et $4 - t$ est positif pour $t < 4$, nul en 4, négatif ensuite. Le produit est donc positif sur $[0; 4]$ et négatif sur $[4; 6]$.

t	0	4	6		
$v'(t)$	0	+	0	-	0
v	0 3,2 0				

- 4) v croît puis décroît : le maximum est atteint en $t = 4 \text{ s}$ et vaut

$$v(4) = 0,6 \times 16 - 0,1 \times 64 = 9,6 - 6,4 = 3,2 \text{ m/s}.$$

Le chariot accélère pendant 4 secondes, puis freine pendant 2 secondes.

Partie B – La distance

- 5) On intègre terme à terme :

$$V(t) = 0,2t^3 - 0,025t^4 = \frac{t^3}{5} - \frac{t^4}{40}.$$

Contrôle : $V'(t) = 0,6t^2 - 0,1t^3 = v(t)$.

- 6) $V(4) = \frac{64}{5} - \frac{256}{40} = \frac{64}{5} - \frac{32}{5} = \frac{32}{5}$ et $V(0) = 0$, donc

$$\int_0^4 v(t) dt = \frac{32}{5} = 6,40 \text{ m}.$$

- 7) $V(6) = \frac{216}{5} - \frac{1296}{40} = \frac{1728}{40} - \frac{1296}{40} = \frac{432}{40} = \frac{54}{5}$, donc

$$\int_0^6 v(t) dt = \frac{54}{5} = 10,8 \text{ m}.$$

- 8) La travée mesure 11 m et le chariot n'en parcourt que 10,8 :

non, il ne l'a pas entièrement parcourue

Il lui manque 20 centimètres.

Remarque : le chariot étant à l'arrêt en $t = 6$, il ne les parcourra pas davantage ensuite — le modèle décrit un cycle complet. Il faudrait revoir la consigne de vitesse, et non simplement attendre.

Exercice 2 : La méthode des rectangles

6 points

- 1) Pour $n = 2$, la largeur vaut $h = \frac{2}{2} = 1$. Les extrémités gauches sont $x = 0$ et $x = 1$.

rectangle	largeur	hauteur $3x^2$	aire
$[0; 1]$	1	$3 \times 0^2 = 0$	0
$[1; 2]$	1	$3 \times 1^2 = 3$	3

Donc $\text{rectangles}(2) = 0 + 3 = 3$.

- 2) Toutes les valeurs du tableau – 3, 5,25, 6,563, 7,410 – sont inférieures à 8. La fonction $x \mapsto 3x^2$ est croissante sur $[0; 2]$: sur chaque intervalle, la valeur à l'extrémité gauche est la plus petite. Chaque rectangle est donc entièrement sous la courbe, et la somme des aires sous-estime systématiquement l'intégrale.
- 3) Plus n augmente, plus les valeurs se rapprochent de 8 : 3, puis 5,25, puis 6,563, puis 7,410. Les rectangles épousent de mieux en mieux la courbe parce que leur largeur diminue. On conjecture que la somme tend vers l'intégrale quand n tend vers $+\infty$ – c'est précisément le lien entre $\sum f(x_i) \Delta x_i$ et $\int f(x) dx$.
- 4) Il suffit de décaler d'un cran, en prenant l'extrémité droite de chaque intervalle :

$$x = (i + 1) * h.$$

La fonction étant croissante, la valeur à droite est cette fois la plus grande de l'intervalle : chaque rectangle dépasserait la courbe, et les approximations seraient supérieures à 8. L'intégrale se trouve donc toujours encadrée par les deux méthodes.

Exercice 3 : Deux primitives à reconnaître

4 points

- 1) $G(x) = e^{x^2}$ est une composée : avec $u(x) = x^2$, on a $u'(x) = 2x$ et $(e^u)' = u' e^u$, donc

$$G'(x) = 2x e^{x^2} = g(x).$$

G est bien une primitive de g . Par conséquent

$$\int_0^1 2x e^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \approx 1,718.$$

- 2) $H(x) = (3x + 1)^3$ est une composée : avec $u(x) = 3x + 1$, on a $u'(x) = 3$ et $(u^3)' = 3u' u^2$, donc

$$H'(x) = 3 \times 3 \times (3x + 1)^2 = 9(3x + 1)^2 = h(x).$$

H est bien une primitive de h . Par conséquent

$$\int_0^1 9(3x + 1)^2 dx = [(3x + 1)^3]_0^1 = 4^3 - 1^3 = 64 - 1 = 63.$$

À retenir : reconnaître une primitive, c'est dériver le candidat et vérifier qu'on retombe sur la fonction de départ. C'est toujours plus rapide que de chercher à intégrer.