

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : La distance parcourue par un chariot

10 points

Un chariot automatisé démarre à l'arrêt et parcourt une travée d'atelier. Sa vitesse, en mètres par seconde, t secondes après le départ, est modélisée sur $[0 ; 6]$ par

$$v(t) = 0,6 t^2 - 0,1 t^3.$$

La distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 est $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Partie A – Le mouvement (5 points)

- 1) Calculer $v(0)$ et $v(6)$. Interpréter ces deux valeurs.
- 2) Montrer que $v'(t) = 1,2 t - 0,3 t^2$, puis que $v'(t) = 0,3 t (4 - t)$.
- 3) Étudier le signe de $v'(t)$ sur $[0 ; 6]$ et dresser le tableau de variations de v .
- 4) En déduire la vitesse maximale du chariot et l'instant où elle est atteinte.

Partie B – La distance (5 points)

- 5) Déterminer une primitive V de v sur $[0 ; 6]$.
- 6) Calculer la distance parcourue pendant les 4 premières secondes. On donnera la valeur exacte sous forme de fraction, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
- 7) Calculer la distance totale parcourue sur les 6 secondes.
- 8) La travée mesure 11 mètres. Le chariot l'a-t-il entièrement parcourue en 6 secondes ? Justifier.

Exercice 2 : La méthode des rectangles

6 points

On souhaite approcher $\int_0^2 3x^2 dx$ sans utiliser de primitive. On découpe $[0 ; 2]$ en n intervalles de même largeur $h = \frac{2}{n}$, et sur chacun on remplace la courbe par un rectangle dont la hauteur est la valeur de la fonction à l'extrémité gauche.

```
def rectangles(n) :
    h = 2 / n
    total = 0
    for i in range(n) :
        x = i * h
        total = total + 3 * x ** 2 * h
    return total
```

- 1) Pour $n = 2$, détailler les deux rectangles : largeur, hauteur, aire. En déduire $\text{rectangles}(2)$.
- 2) Le tableau ci-dessous donne les valeurs renvoyées par le script.

n	2	4	8	20
$\text{rectangles}(n)$	3,000	5,250	6,563	7,410

La valeur exacte de l'intégrale est 8. Les approximations sont-elles supérieures ou inférieures à cette valeur ? Expliquer pourquoi, en s'appuyant sur le sens de variation de la fonction.

- 3) Que se passe-t-il lorsque n augmente ? Que peut-on en conjecturer ?
- 4) Modifier la ligne `x = i * h` pour que les rectangles s'appuient sur l'extrémité *droite* de chaque intervalle. Les approximations seraient-elles alors supérieures ou inférieures à 8 ?

Exercice 3 : Deux primitives à reconnaître

4 points

Cet exercice porte sur le chapitre « Composition de fonctions ».

- 1) Vérifier que $G(x) = e^{x^2}$ est une primitive de $g(x) = 2x e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\int_0^1 2x e^{x^2} dx$. On donnera la valeur exacte.
- 2) Vérifier que $H(x) = (3x+1)^3$ est une primitive de $h(x) = 9(3x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\int_0^1 9(3x+1)^2 dx$.